



HAL
open science

Famille à un paramètre de coniques utilisant des courbes de Bézier à poids complexes

Jean-Paul Becar, Laurent Fuchs, Lionel Garnier

► To cite this version:

Jean-Paul Becar, Laurent Fuchs, Lionel Garnier. Famille à un paramètre de coniques utilisant des courbes de Bézier à poids complexes. GTMG 2019, ENSEEIHT, 2019, TOULOUSE, France. hal-02510437

HAL Id: hal-02510437

<https://uphf.hal.science/hal-02510437>

Submitted on 17 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Famille à un paramètre de coniques utilisant des courbes de Bézier à poids complexes

Jean-Paul BECAR¹, Laurent FUCHS², Lionel GARNIER³

¹ LAMAV FR2956, EA 4015, Université de Valenciennes France
jean-paul.becar@uphf.fr

² XLIM, UMR 7252, Université de Poitiers,
laurent.fuchs@univ-poitiers.fr

³ L.I.B., Université de Bourgogne Franche-Comté, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex, France,
lionel.garnier@u-bourgogne.fr

Résumé

L'article traite du mode de représentation des coniques écrites sous forme Bézier rationnelle à l'aide de points massiques où les masses sont des nombres complexes. Une représentation spéciale des coniques reposant sur des points pondérés et des vecteurs purs offre une souplesse de calcul dans les transformations géométriques élémentaires comme les rotations, homothéties et similitudes directes. Des exemples sont proposés au lecteur prouvant cet usage.

The paper deals with conics in a rational Bézier representation based on mass points where the weights are complex numbers here.

A special representation of conics using weighted points and vectors offers a calculus flexibility in the handle elementary geometrical transformations as rotations, homotheties and direct similarity transformations. Some examples are proposed to the reader.

Mots-clés : Modélisation géométrique, Points massiques complexes...

1 Introduction

L'article traite du mode de représentation des coniques écrites sous forme Bézier rationnelle à l'aide de points massiques où les masses sont des nombres complexes. Une représentation spéciale des coniques reposant sur des points pondérés et des vecteurs purs offre une souplesse de calcul dans les transformations géométriques élémentaires comme les rotations, homothéties et similitudes directes. De nombreux exemples sont proposés au lecteur prouvant cet usage.

Une série de travaux sur les courbes de Bézier rationnelles à poids complexes a été entreprise par Sanchez-Reyes [SR09]. Le mode de représentation à l'aide de poids complexes fait généralement augmenter voire doubler le degré de ces courbes une fois revenu dans le plan réel. Ainsi, une courbe Bézier rationnelle de degré 1 avec des poids com-

plexes est un arc de cercle. Dans certains cas, le degré de ces courbes dans le domaine complexe est le même que celui du domaine réel.

Une courbe de Bézier rationnelle de degré 2 avec des poids complexes devient une cubique ou une quartique dans le plan réel.

Toutefois, par un choix de poids complexe(s) éventuellement nul(s), la courbe conique de degré 2 ne change pas de degré une fois dans le plan réel. Dans le mode de représentation des coniques avec poids complexes, le choix du ou des poids complexe(s) offre des transformations classiques élégantes sur la conique créant ainsi une famille de coniques à un paramètre. La section 2 fournit une représentation d'un arc de cercle à partir d'une courbe de Bézier rationnelle linéaire à laquelle nous ajoutons la modélisation de demi-cercles. La section 3 donne une représentation particulière des trois familles de coniques propres à un paramètre complexe. Les ellipses, hyperboles et paraboles sont présentées

aux lecteurs. La modification du paramètre complexe a pour conséquence la mise en œuvre d'une transformation géométrique élémentaire sur la conique ainsi définie.

Ce travail est préparatoire à un développement de ce mode de représentation particulier. Il serait possible de l'exploiter en vue d'optimiser les performances calculatoires ou de créer de nouveaux modes de représentations des objets classiques de la C.A.O. améliorant par son élégance, la versatilité des structures de données adéquates. La dernière section tire des conclusions et propose quelques perspectives.

2 Modélisation d'arc de cercle par des courbes de Bézier rationnelles linéaires

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le plan complexe \mathbb{C} muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit quatre complexes z_0, z_1, ω_0 et ω_2 avec $z_0 \neq z_1, \omega_0 \omega_2 \neq 0$ et

$$|\arg(\omega_0)| \neq |\arg(\omega_1)| \quad (1)$$

Considérons la courbe de Bézier rationnelle linéaire définie par :

$$z(t) = \frac{(1-t)\omega_0 z_0 + t\omega_1 z_1}{(1-t)\omega_0 + t\omega_1}, t \in [0; 1]$$

Remarquons que :

- si $\arg(\omega_0) = \arg(\omega_1) [2\pi]$, la courbe est le segment dont les extrémités ont pour affixes z_0 et z_1 ;
- si $\arg(\omega_0) = -\arg(\omega_1) [2\pi]$, la courbe est la droite définie par les affixes z_0 et z_1 privée du segment précédent ouvert ;
- sinon la courbe obtenue est un arc de cercle dont les extrémités ont pour affixe z_0 et z_1 [SR09].

Introduisons la fonction suivante :

$$\chi: \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & x \end{array}$$

qui permet d'utiliser les mêmes formules pour manipuler les points et les vecteurs. Notons qu'en exprimant $z(t)$ sous forme algébrique, le dénominateur devient un polynôme quadratique à coefficients réels n'ayant pas de racines réelles (c'est le carré du module d'un nombre complexe non nul grâce à la condition de la formule (1)) : nous obtenons une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points mas-

siques de contrôle $(Z_0; \varpi_0), (Z_1; \varpi_1)$ et $(Z_2; \varpi_2)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = z_0 \\ Z_1 = \frac{\omega_0 \overline{\omega_1} z_0 + \overline{\omega_0} \omega_1 z_1}{2\chi\left(\frac{\omega_0 \overline{\omega_1} + \overline{\omega_0} \omega_1}{2}\right)} \\ Z_2 = z_1 \\ \varpi_0 = |\omega_0|^2 \\ \varpi_1 = \frac{\omega_0 \overline{\omega_1} + \overline{\omega_0} \omega_1}{2} \\ \varpi_2 = |\omega_1|^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

et il est aisé de remarquer que si $\varpi_1 \neq 0$, nous avons :

$$|Z_1 - Z_0| = |Z_1 - Z_2|$$

d'une part et :

$$\left(\frac{\overline{Z_1 - Z_0}(Z_2 - Z_0) + (Z_1 - Z_0)\overline{Z_2 - Z_0}}{2|Z_1 - Z_0| \times |Z_2 - Z_0|} \right)^2 = \frac{\varpi_1^2}{\varpi_0 \varpi_2}$$

ce qui montre que la courbe est un arc de cercle. Si $\arg(\omega_0) = \arg(\omega_1) + \frac{\pi}{2} [\pi]$, nous avons $\varpi_1 = 0$ et la courbe est un demi-cercle nécessitant l'emploi des points massiques.

La figure 1 montre quelques cercles obtenus par des courbes de Bézier rationnelles linéaires à poids complexes.

Dans les deux cas, nous avons $Z_0 = 2$ et $Z_2 = -2$ et les autres affixes massiques de contrôle sont données dans le tableau 1.

3 Coniques non circulaires

Une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle non alignés représente un arc de conique lorsque les poids sont réels et nous pouvons obtenir n'importe quel arc de conique propre [GB16, GB17b, BG14, BFG19, BFG18, Béc97, FJ89, FJ92]. Naturellement, lorsque les poids sont complexes, les parties réelles et imaginaires des complexes de la courbe de Bézier sont de degré 4. Cependant, quelques cas particuliers existent. Commençons par un lemme concernant la multiplication de tous les points massiques de contrôle par un même scalaire non nul généralisant un résultat classique.

Lemme 1 :

Soit $(P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit λ un réel non nul. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} RQBC \left\{ (P_i; \omega_i)_{i \in I}; \left(\vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} &= \\ RQBC \left\{ (P_i; \lambda \omega_i)_{i \in I}; \left(\lambda \vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} & \end{aligned} \quad (3)$$

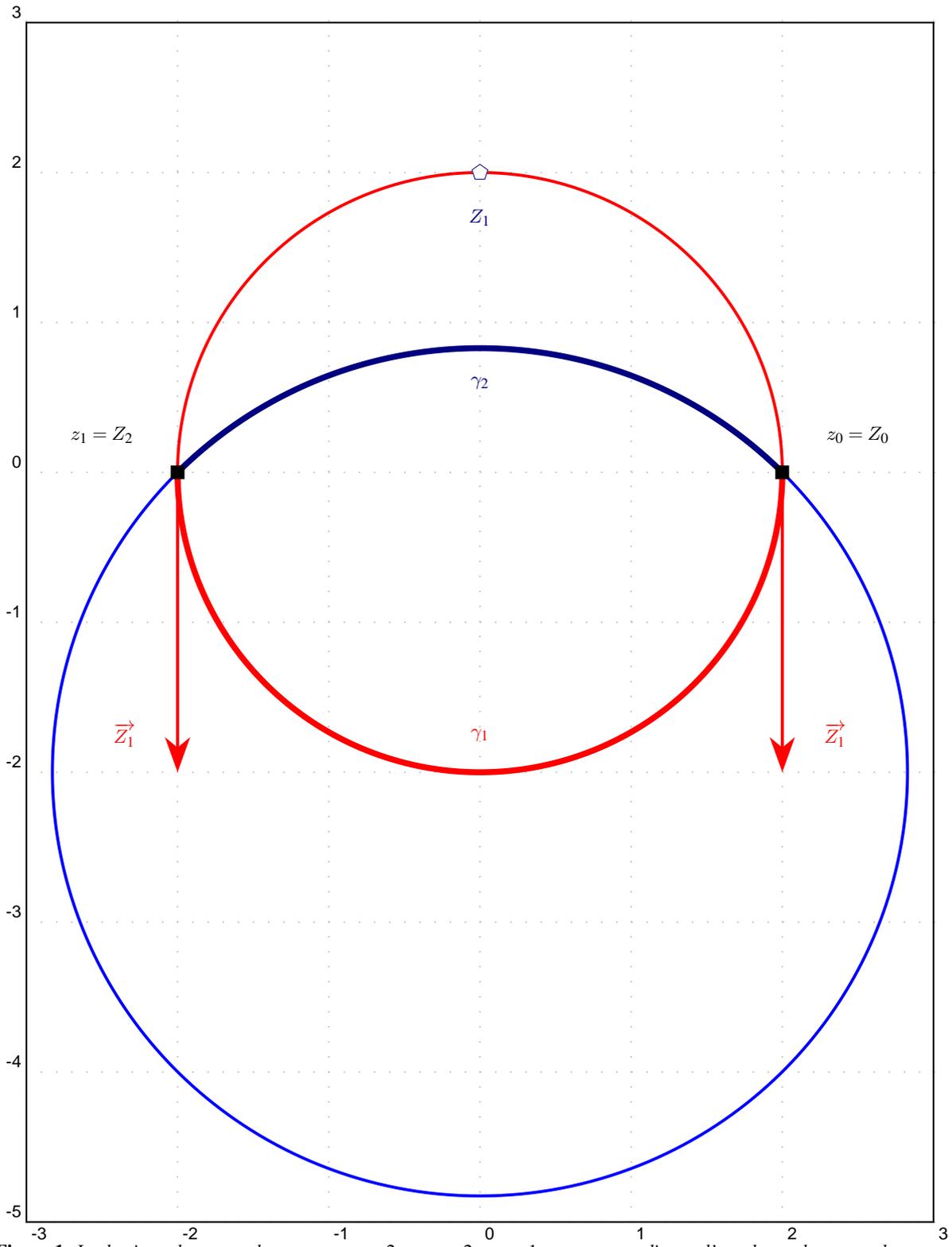


Figure 1: Le demi-cercle γ_1 est obtenu avec $z_0 = 2$, $z_1 = -2$, $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = i$ tandis que l'arc de cercle γ_2 est obtenu avec $z_0 = 2$, $z_1 = -2$, $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\omega_1 = \frac{1}{2}$.

| | γ_1 | γ_2 |
|------------|---|--|
| ϖ_0 | 1 | 1 |
| ϖ_1 | $\frac{1 \times (-i) + 1 \times i}{2} = 0$ | $\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| ϖ_2 | 1 | $\frac{1}{4}$ |
| Z_1 | $\frac{1 \times (-i) \times 2 + 1 \times i \times -2}{2} = -2i$ | $\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} \times 2 + e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} \times -2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) i = 2i$ |

Table 1: Affixes massiques de contrôle correspondant à la figure 1 lorsque nous n'utilisons que des poids réels.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\
& + \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \sum_{j \in J} B_j(t_0) \overrightarrow{P_i} \\
& = \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda \omega_i \times B_i(t_0)} \sum_{i \in I} \lambda \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\
& + \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda \omega_i \times B_i(t_0)} \sum_{j \in J} B_j(t_0) \lambda \overrightarrow{P_i}
\end{aligned}$$

■

Si $J = \emptyset$, nous ne changeons pas les points de contrôle d'une CBRQ en multipliant tous les poids par un même réel non nul.

3.1 Cas d'une branche d'hyperbole

Si ω_1 est réel, $RQBC\left\{\left(\overrightarrow{P_0};0\right);(P_1;\omega_1);\left(\overrightarrow{P_2};0\right)\right\}$ est une branche d'hyperbole. Maintenant, considérons le poids complexe ω_1 . En utilisant le lemme 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
& RQBC\left\{\left(\overrightarrow{P_0};0\right);(P_1;\omega_1);\left(\overrightarrow{P_2};0\right)\right\} = \\
& RQBC\left\{\left(\frac{1}{\omega_1}\overrightarrow{P_0};0\right);(P_1;1);\left(\frac{1}{\omega_1}\overrightarrow{P_2};0\right)\right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

ce qui montre que :

- le centre P_1 de l'hyperbole est invariant ;
- les vecteurs directeurs $\frac{1}{\omega_1}\overrightarrow{P_0}$ et $\frac{1}{\omega_1}\overrightarrow{P_2}$ des asymptotes sont les images des vecteurs $\overrightarrow{P_0}$ et $\overrightarrow{P_2}$ par la similitude vectorielle directe de rapport $\frac{1}{|\omega_1|}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{\omega_1}\right) = -\arg(\omega_1)$.

La figure 2 montre quelques branches d'hyperboles modélisées par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{P_0};0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(\overrightarrow{P_2};0)$: le cas « standard » avec $\omega_1 = 1$ permettant de déterminer les paramètres de l'hyperbole puis deux cas où le poids est complexe.

3.2 Cas d'un arc de parabole

Si ω_0 est réel, $RQBC\left\{(P_0;\omega_0);(\overrightarrow{P_1};0);(\overrightarrow{P_2};0)\right\}$ est une « demi-parabole » de sommet P_0 . Maintenant, considérons le poids complexe ω_0 . En utilisant le lemme 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
& RQBC\left\{(P_0;\omega_0);(\overrightarrow{P_1};0);(\overrightarrow{P_2};0)\right\} = \\
& RQBC\left\{(P_0;1);\left(\frac{1}{\omega_0}\overrightarrow{P_1};0\right);\left(\frac{1}{\omega_0}\overrightarrow{P_2};0\right)\right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

ce qui montre que :

- Le sommet P_0 de la parabole est invariant ;
- Les vecteurs tangents $\frac{1}{\omega_0}\overrightarrow{P_1}$ et directeur de l'axe de la parabole $\frac{1}{\omega_0}\overrightarrow{P_2}$ sont les images respectives des vecteurs $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ par la similitude vectorielle directe de rapport $\frac{1}{|\omega_0|}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{\omega_0}\right) = -\arg(\omega_0)$.

La figure 3 montre quelques arcs de paraboles modélisés par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$ et $(\overrightarrow{P_2};0)$: le cas « standard » avec $\omega_0 = 1$ permettant de déterminer les paramètres de la parabole puis deux cas où le poids est complexe.

3.3 Cas d'un arc d'ellipse

Si ω_{02} est un réel non nul, $RQBC\left\{(P_0;\omega_{02});(\overrightarrow{P_1};0);(P_2;\omega_{02})\right\}$ est une demi-ellipse de diamètre $[P_0P_2]$. Maintenant, considérons le

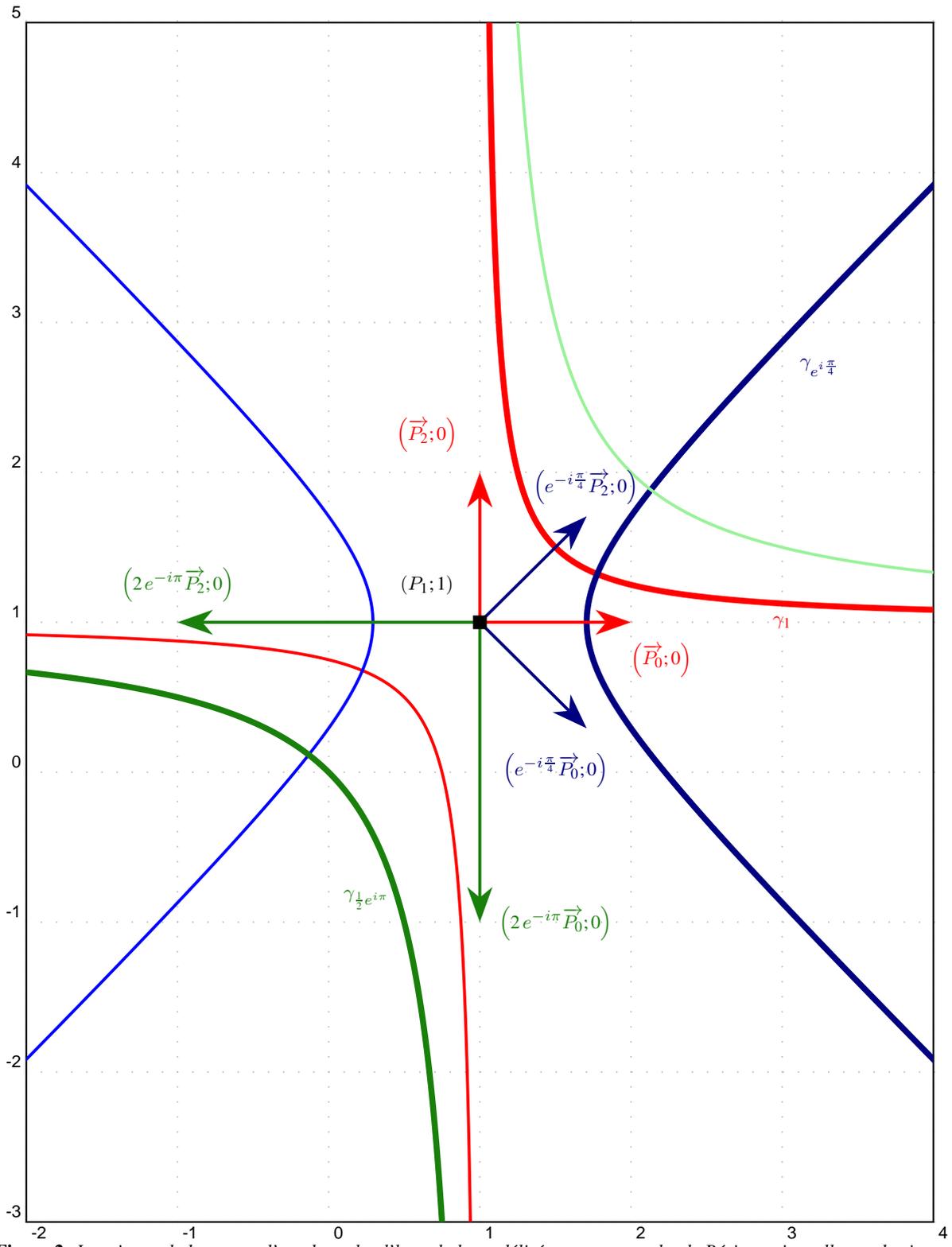


Figure 2: Invariance de la nature d'une branche d'hyperbole modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(\vec{P}_0; 0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\vec{P}_2; 0)$. La courbe γ_1 est le cas standard avec $\omega_1 = 1$. La courbe $\gamma_{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. La courbe $\gamma_{\frac{1}{2}e^{i\pi}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_1 = \frac{1}{2}e^{i\pi}$.

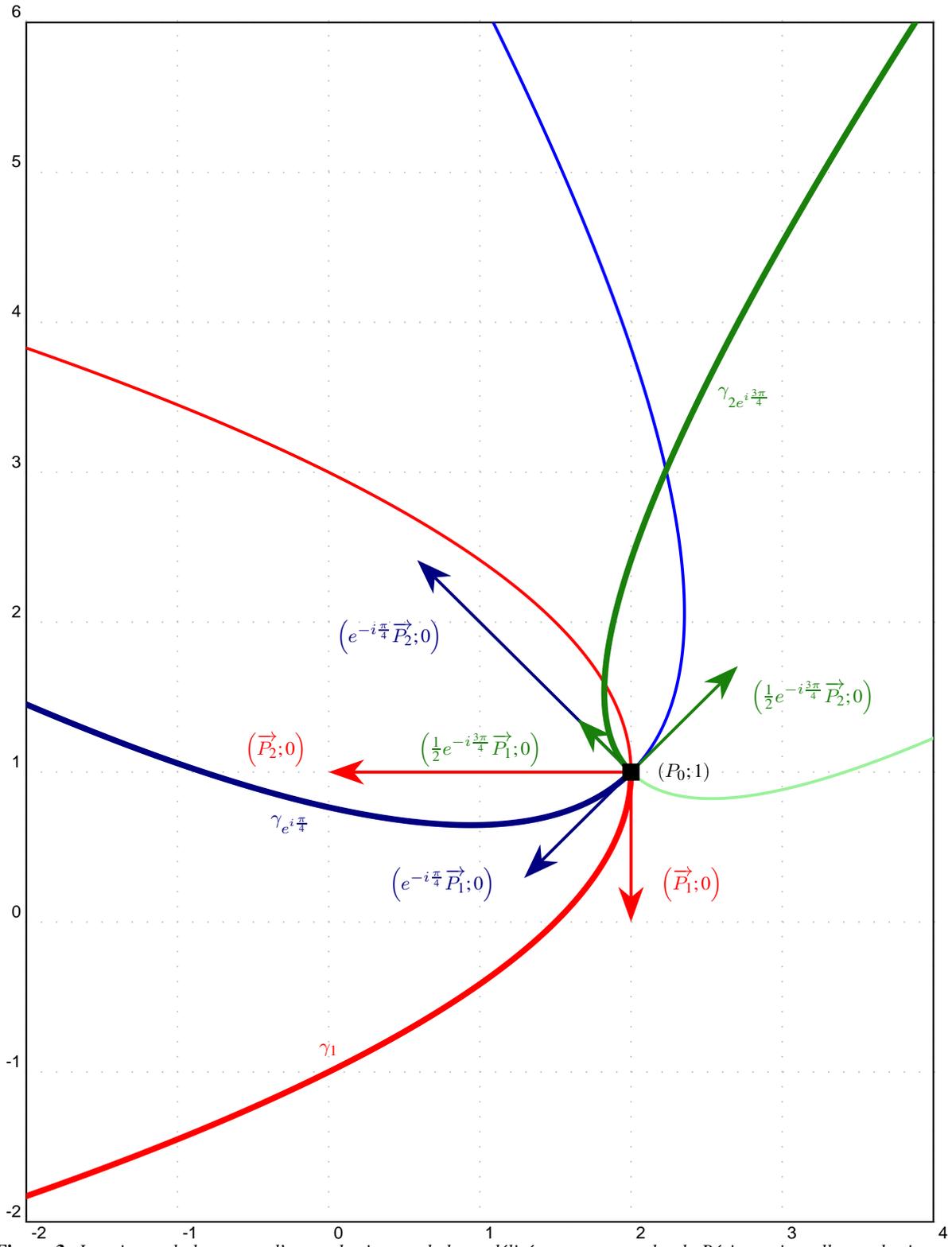


Figure 3: Invariance de la nature d'une « demi »-parabole modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(\vec{P}_1;0)$ et $(\vec{P}_2;0)$. La courbe γ_1 est le cas standard avec $\omega_0 = 1$. La courbe $\gamma_{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. La courbe $\gamma_{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

poids complexe ω_{02} . En utilisant le lemme 1, nous avons :

$$\begin{aligned} RQBC \left\{ (P_0; \omega_{02}); \left(\vec{P}_1; 0 \right); (P_2; \omega_{02}) \right\} &= \\ RQBC \left\{ (P_0; 1); \left(\frac{1}{\omega_{02}} \vec{P}_1; 0 \right); (P_2; 1) \right\} &\quad (6) \end{aligned}$$

ce qui montre que :

- Le diamètre $[P_0P_2]$ de l'ellipse est invariant ;
- Le vecteur tangent $\frac{1}{\omega_{02}} \vec{P}_1$ est l'image du vecteur \vec{P}_1 par la similitude vectorielle directe rapport $\frac{1}{|\omega_{02}|}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{\omega_{02}}\right) = -\arg(\omega_{02})$.

La figure 4 montrent quelques demi-ellipses modélisées par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_{02})$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; \omega_{02})$: le cas « standard » avec $\omega_{02} = 1$ permettant de déterminer les paramètres de l'ellipse puis deux cas où le poids est complexe.

3.4 Ellipse et hyperbole ayant même diamètre

Si ω_0 est un réel non nul, $RQBC \left\{ (P_0; \omega_0); \left(\vec{P}_1; 0 \right); (P_2; -\omega_0) \right\}$ est une « demi »-hyperbole de diamètre $[P_0P_2]$ et de vecteur tangent colinéaire et de même sens que \vec{P}_1 en P_0 [GD13]. Maintenant, considérons le poids complexe ω_{02} . En utilisant le lemme 1, nous avons :

$$\begin{aligned} RQBC \left\{ (P_0; \omega_{02}); \left(\vec{P}_1; 0 \right); (P_2; -\omega_{02}) \right\} &= \\ RQBC \left\{ (P_0; 1); \left(\frac{1}{\omega_0} \vec{P}_1; 0 \right); (P_2; -1) \right\} &\quad (7) \end{aligned}$$

ce qui montre que :

- le diamètre $[P_0P_2]$ de l'hyperbole est invariant ;
- le vecteur tangent $\frac{1}{\omega_0} \vec{P}_1$ est l'image du vecteur \vec{P}_1 par une similitude vectorielle directe rapport $\frac{1}{|\omega_0|}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{\omega_0}\right) = -\arg(\omega_0)$.

La figure 5 montrent deux jointures G^1 entre une demi-ellipse et une demi-hyperbole le long du même diamètre $[P_0P_2]$:

- la jointure entre le demi-cercle γ_1 modélisé par la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; 1)$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; 1)$ et la demi-hyperbole $\gamma_{\mathcal{H}_1}$ modélisée par la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; 1)$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; -1)$;
- la jointure entre le demi-cercle $\gamma_{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$ modélisé par la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; e^{i\frac{5\pi}{6}})$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; e^{i\frac{5\pi}{6}})$ et la demi-hyperbole $\gamma_{\mathcal{H}_{e^{i\frac{5\pi}{6}}}}$ modélisée

modélisé par la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; e^{i\frac{5\pi}{6}})$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; -e^{i\frac{5\pi}{6}})$.

Notons que les vecteurs tangents aux demi-ellipse et demi-hyperbole idoines en P_0 sont de même sens tandis qu'ils sont opposés en P_2 c'est-à-dire que le point P_0 est un point de rebroussement.

4 Ensemble des nombres complexes massiques

Afin d'utiliser des poids complexes, il est naturel de se place dans l'ensemble des complexes massiques [GB17a].

Définition 1 : CBRQ dans l'ensemble $\tilde{\mathbb{C}}$ des complexes massiques.

Pour $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, considérons les trois complexes massiques suivants

$$\tilde{z}_i = z_i + \omega_i \kappa, \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad \omega_i \in \mathbb{C} \quad (8)$$

où nous avons :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C} & z \times \kappa = 0 \\ & \kappa \times \kappa = \kappa \end{cases}$$

La courbe de Bézier rationnelle quadratiques, de nombres complexes massiques de contrôle est γ définie en utilisant I l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls et J l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids nuls. Pour t_0 de $[0; 1]$, si nous avons :

$$\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0) \neq 0 \quad (9)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}(t) &= \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_0(t) \odot \tilde{z}_0) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_1(t) \odot \tilde{z}_1) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_2(t) \odot \tilde{z}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

tandis que dans le cas contraire, nous obtenons :

$$\widetilde{\gamma}(t) = B_0(t) \odot \tilde{z}_0 \oplus B_1(t) \odot \tilde{z}_1 \oplus B_2(t) \odot \tilde{z}_2$$

Soit $P(z)$ et $\vec{u}(z)$. Nous avons la bijection de $\tilde{\mathcal{P}} \times \mathbb{C}$ dans $\tilde{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ qui à tout couple de point pondéré $(P; \omega)$ associe le complexe massique $\tilde{z} = z + \omega \kappa$ et à tout vecteur pur \vec{u} associe le complexe massique $\tilde{z} = z + 0 \kappa = z$.

La figure 6 montre une branche d'hyperbole modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant des nombres complexes massiques de contrôle.

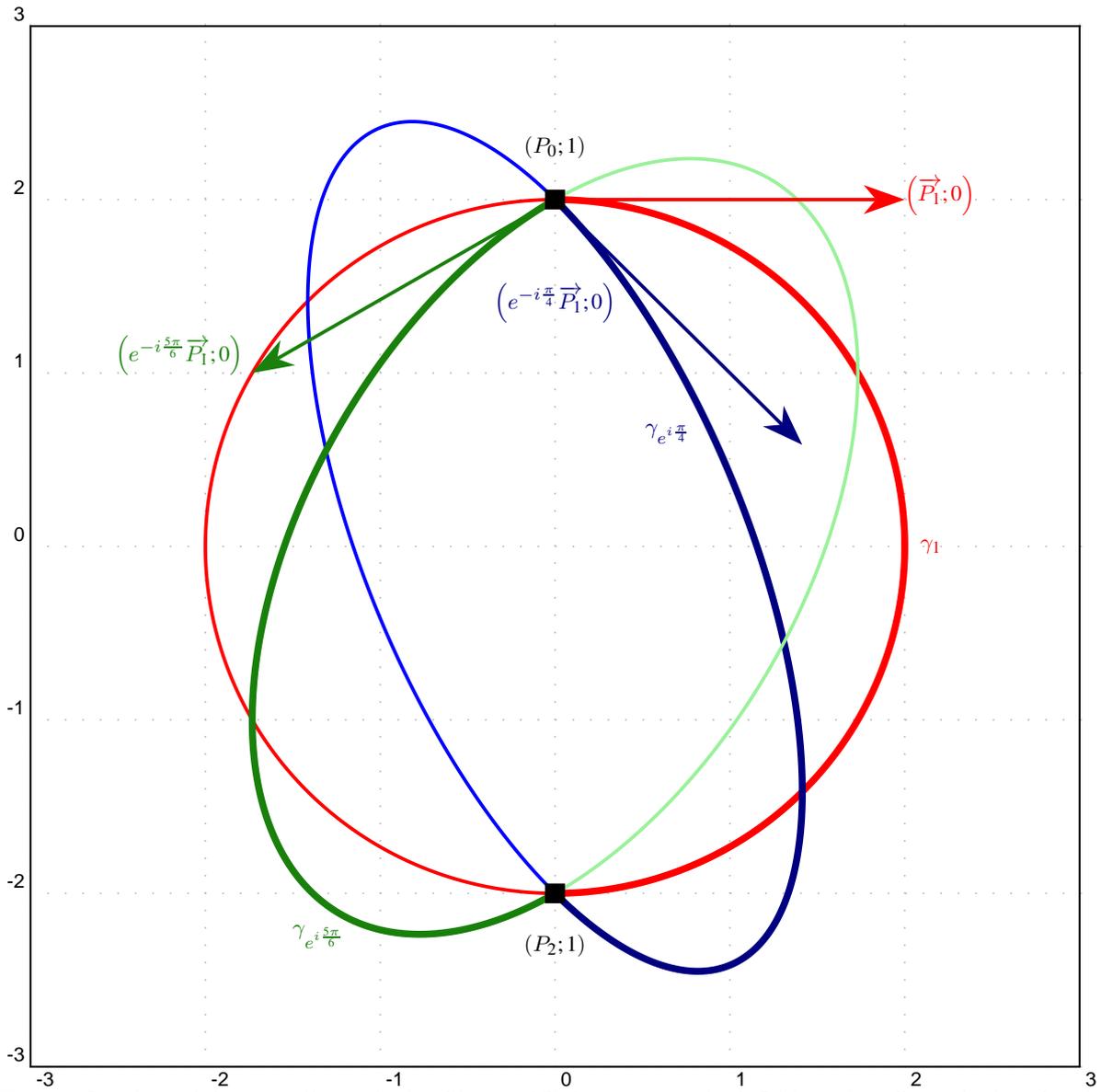


Figure 4: Invariance de la nature d'une « demi »-ellipse modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_{02})$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; \omega_{02})$. La courbe γ_1 est le cas standard avec $\omega_{02} = 1$ et nous avons un demi-cercle. La courbe $\gamma_{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_{02} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. La courbe $\gamma_{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$ est obtenue avec le poids complexe $\omega_0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

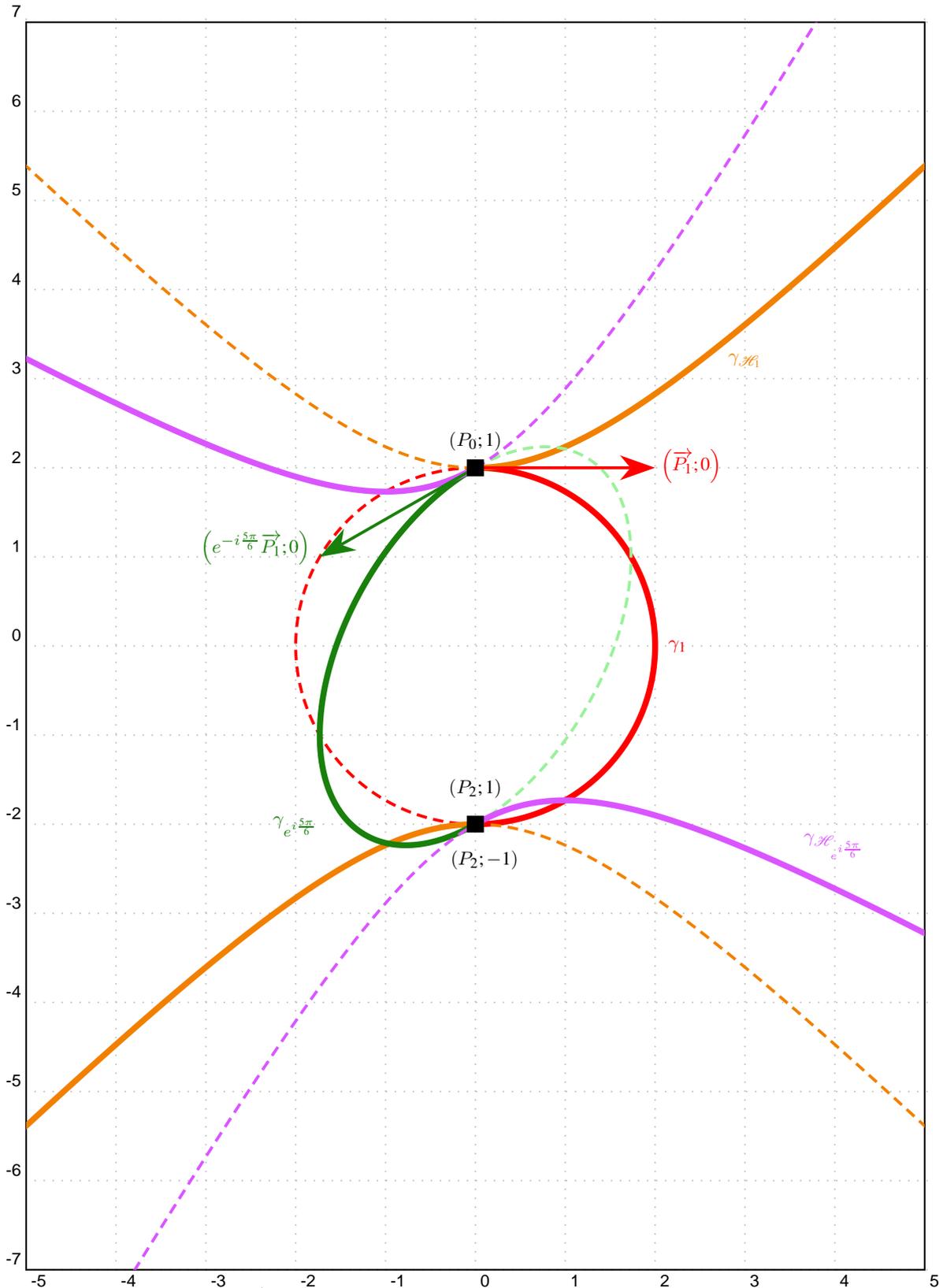


Figure 5: Jointures G^1 entre une demi-ellipse et une demi-hyperbole le long d'un diamètre commun.

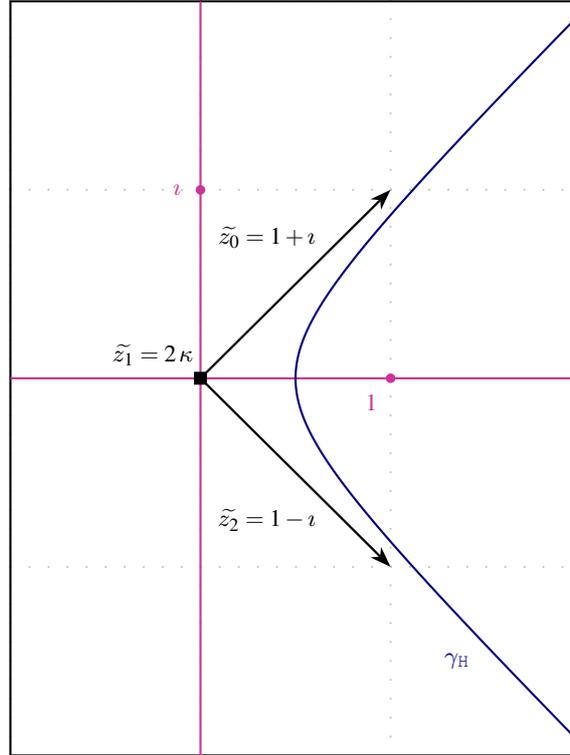


Figure 6: Courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant pour points de contrôle des nombres complexes massiques représentant une branche d'hyperbole.

Soit $z_\Omega = 2 - \iota$ l'affixe du centre de la similitude $\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}$ de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La figure 7 montre une branche d'hyperbole modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant des nombres complexes massiques de contrôle obtenue comme image par une similitude directe de la branche d'hyperbole [GB17a].

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons montré l'effet d'un poids complexe sur une courbe de Bézier rationnelle quadratique : les points affines sont invariants tandis que les vecteurs subissent une similitude directe.

Ce travail est préparatoire à un développement de ce mode de représentation particulier. Il serait possible de l'exploiter en vue d'optimiser les performances calculatoires ou de créer de nouveaux modes de représentations des objets classiques de la C.A.O. améliorant par son élégance, la versatilité des structures de données adéquates. La dernière section tire des conclusions et propose quelques perspectives. En particulier, nous pouvons nous focaliser sur les propriétés des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à poids complexes telles que les boucles, les points singuliers ou de rebroussements.

Références

- [Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [BFG18] BÉCAR J.-P., FUCHS L., GARNIER L. : Modéliser un demi-cercle et autres questions de poids nuls. AFIG, (Ed.), Université de Poitiers. http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf.
- [BFG19] BÉCAR J.-P., FUCHS L., GARNIER L. : Courbe d'une fraction rationnelle et courbes de bézier à points massiques. GTMG, (Ed.), Université de Toulouse.
- [BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24. Masson, 1992.
- [GB16] GARNIER L., BÉCAR J.-P. : Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geo-*

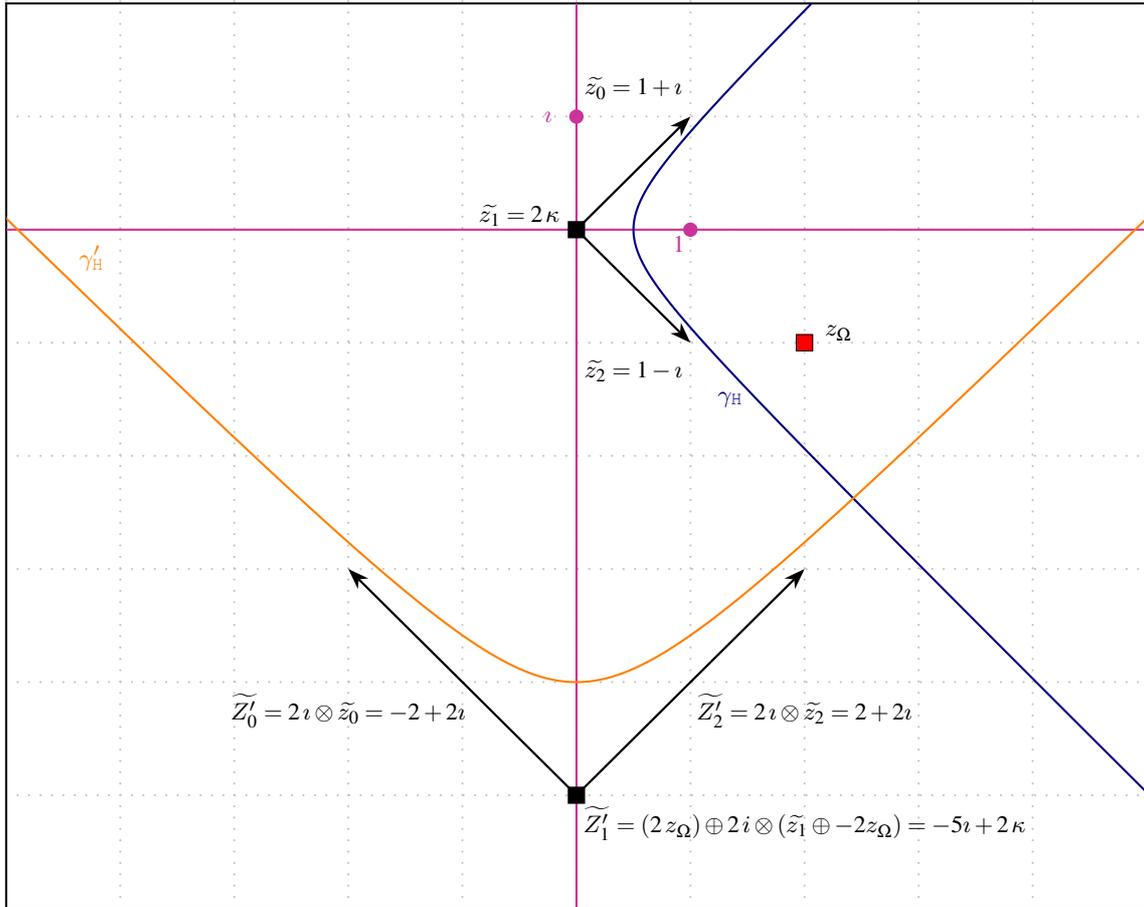


Figure 7: Courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant pour points de contrôle des nombres complexes massiques représentant une branche d'hyperbole obtenue comme image de la courbe de Bézier rationnelle quadratique de la figure .

metry (Strasbourg, France, juin 2016), Proceedings of ADG 2016, pp. 97–116. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.

[GB17a] GARNIER L., BÉCAR J. P. : Courbes de bézier quadratiques et nombres complexes massiques. In *G.T.M.G. 2017* (Cachan, Mars 2017).

[GB17b] GARNIER L., BÉCAR J. P. : *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*. Editions Universitaires Européennes, Saarbrücken, 2017. ISBN 978-3-639-54676-7.

[GD13] GARNIER L., DRUOTON L. : Inversions de coniques à centres vues comme des cercles. AFIG, (Ed.), Université de Limoges.

[SR09] SÁNCHEZ-REYES J. : Complex rational Bézier curves. *Comput. Aided Geom. Des.* Vol. 26, Num. 8 (nov 2009), 865–876.