

# Points massiques, hyperbole et hyperboloïde à une nappe

Jean-Paul Becar, Lionel Garnier, Lucie Druoton

► **To cite this version:**

Jean-Paul Becar, Lionel Garnier, Lucie Druoton. Points massiques, hyperbole et hyperboloïde à une nappe. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique 2015,, 2015, POITIERS, France. hal-02513119

**HAL Id: hal-02513119**

**<https://hal-uphf.archives-ouvertes.fr/hal-02513119>**

Submitted on 20 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Points massiques, hyperbole et hyperboloïde à une nappe

Jean-Paul BECAR<sup>1</sup>, Lionel GARNIER<sup>2</sup>, Lucie DRUOTON<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

<sup>2</sup>LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, lionel.garnier@u-bourgogne.fr

<sup>3</sup>IMB, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, lucie.druoton@u-bourgogne.fr

---

## Résumé

*Les courbes de Bézier rationnelles quadratiques jouent un rôle fondamental pour la modélisation d'arcs de coniques propre. Cependant, lorsque les deux points extrémaux de l'arc ne sont pas sur la même branche d'une hyperbole, l'utilisation des courbes de Bézier classiques est impossible. Il suffit de considérer les points massiques, à la place des points pondérés, pour remédier à ce problème. De plus, nous gardons la structure (pseudo)-métrique du plan dans lequel nous nous trouvons et il est possible de modéliser une branche d'hyperbole dont les extrémités sont deux vecteurs, non colinéaires, de même norme, définis par les directions des asymptotes. Nous donnons comme application le tracé d'une branche d'hyperbole sur un hyperboloïde à une nappe. Afin de simplifier ce travail, nous utilisons une forme quadratique de signature (2;1) permettant de manipuler cette quadrique comme une sphère unité : ainsi, les courbes seront manipulables comme des cercles.*

*It is well known that proper conic arcs can be modeled by rational quadratic Bézier curves but we can not use Bézier curves when the two endpoints of the arc do not belong to the same branch of a hyperbola. A solution is the use of massic points and moreover, it is easy to model a branch of hyperbola : the bounds are vectors having the same direction than the asymptote of the hyperbola and we can determine hyperbola parameters. The use of the massic points does not depend on the Euclidean structure : we can define a quadratic form such as the hyperboloid of revolution of one sheet is seen as an unit sphere. Then, the hyperbolae on this quadric have almost the properties of a circle (with two asymptotes).*

---

**Mots-clés :** Hyperbole, points massiques, courbe de Bézier, forme quadratique, hyperboloïde à une nappe, cercle.

## 1 Introduction

Deux personnes ont défini les mêmes outils afin de résoudre leurs problèmes de modélisation en CFAO dans leurs industries respectives : Pierre Bézier [Béz86] chez Renault et Paul de Casteljaou [Cas85] chez Citroën. P. Bézier a laissé son nom aux courbes tandis que P. de Casteljaou a donné son nom à un algorithme de construction.

Les courbes de Bézier de degré 2, polynomiales ou rationnelles, jouent un très grand rôle en modélisation géométrique puisqu'elles permettent de représenter des arcs de coniques. Une telle courbe peut être vue comme le lieu de barycentres de points pondérés : le poids est le produit d'un

nombre avec un polynôme de Bernstein. Cependant, la modélisation d'arcs d'hyperboles pose problème puisque ces dernières ne sont pas bornées. Une solution élégante consiste à regrouper dans le même espace, celui des points massiques [FJ89, Gol02], l'ensemble des points pondérés et des vecteurs que nous affectons d'un poids nul. Ainsi, nous pouvons généraliser la notion de courbes de Bézier. De plus, en se donnant une courbe de Bézier rationnelle quadratique, grâce à des représentations adéquates, nous pouvons déterminer très facilement les éléments caractéristiques de la conique définie par cette courbe de Bézier. Nous illustrons ceci en prenant comme courbe d'étude les hyperboles. et nous déterminons les paramètres d'une hyperbole en modélisant toute une branche : nous avons simplifié l'approche faite par J. P. Bécar dans sa thèse [Béc97]. Ces déterminations des paramètres ont déjà été effectuées en travaillant dans la fermeture projective du plan affine, G. Albrecht en se servant

du calcul matriciel [Alb01], R. Goldman et W. Wang qui se servent du calcul matriciel et de la reparamétrisation des courbes [GW04]. Ces méthodes présentent l'inconvénient de ne travailler que dans l'espace projectif ce qui fait perdre toute structure métrique au plan affine. Quant à lui, E. Lee, en restant dans l'espace affine, a proposé des méthodes, basées sur la reparamétrisation des courbes, le produit vectoriel et l'utilisation de relations algébriques [Lee85] : contrairement à l'utilisation des points massiques, sa méthode n'est pas adaptée à un plan, n'est utilisable ni dans un espace de dimension 5 [GDL12] ni dans un espace non euclidien [GDL12, Dru13]. A partir d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique sous forme standard (i.e. à points pondérés de contrôle et de poids intermédiaire positif), J. Sánchez-Reyes détermine les propriétés de la conique sous-jacente à cette courbe de Bézier en utilisant les nombres complexes [SR11]. Notre méthode permet d'utiliser des poids négatifs et des vecteurs comme points de contrôle, et la notation vectorielle permet de se placer dans n'importe quel espace euclidien sans identifier le plan de la conique au plan complexe.

Notons que ce travail n'est pas possible en utilisant les coordonnées homogènes qui sont les représentants de points d'un espace quotient. Comme l'indique leur nom, les relations d'équivalence mettent en relation des éléments d'un ensemble qui, d'un certain point de vue, peuvent être considérés comme équivalents. Il n'est pas possible alors de distinguer des éléments qui sont équivalents entre eux dans un espace quotient. L'utilisation des coordonnées homogènes n'est pas possible puisque, d'une part, la structure euclidienne (ou autre) du plan affine ne peut être considérée dans sa fermeture projective, et d'autre part, le choix d'un représentant ou d'un autre d'une classe d'équivalence change la nature de la courbe [Gar10]. En utilisant les coordonnées homogènes, au mieux, nous pouvons distinguer trois types de coniques si nous connaissons la droite de l'infini : les ellipses affines (et donc les cercles), les paraboles affines et les hyperboles affines. Dans chacun de ces trois sous-groupes affines, il n'est pas possible de distinguer une conique propre d'une autre conique propre. Notons que si nous ne connaissons pas la droite de l'infini, nous ne pouvons pas distinguer une conique propre de l'un d'un groupe avec une autre conique propre d'un autre groupe [Ing11] c'est-à-dire que nous ne pouvons pas discerner une ellipse d'une parabole. La figure 1 illustre la modification de la conique affine en fonction de la droite de l'infini : si la droite de l'infini  $\Delta_1$  est remplacée par la droite de l'infini  $\Delta_2$ , alors :

- la parabole  $P_1$  devient l'ellipse  $E_2$  ;
- l'ellipse  $E_1$  devient l'hyperbole  $H_2$  ;
- l'hyperbole  $H_1$  devient la parabole  $P_2$ .

Le formalisme des courbes de Bézier à points massiques de contrôle s'étend à toute dimension et ne dépend pas de la forme quadratique considérée. Nous allons, à partir d'un hyperboloïde à une nappe, définir la forme quadratique idoïne afin de voir ce dernier comme une sphère unité. Nous montrons comment nous pouvons construire des cercles (qui se tracent comme des hyperboles) sur cette sphère unité à l'aide

du formalisme des points massiques. D'autres applications sont possibles dans l'espace des sphères [DGL<sup>+</sup>10, GDL12, DFGL14, LSD<sup>+</sup>14, LW08, LO08] puisque tout faisceau de sphères à points limite ou toute cyclide de Dupin ayant deux points singuliers<sup>†</sup> est représentée par un cercle qui se trace comme une hyperbole et les asymptotes nous permettent de déterminer les points singuliers (sphères de rayon nul). L. Fang peut représenter des demi-coniques en utilisant des courbes de Bézier de degré 4 [Fan02] ce qui implique l'utilisation de cinq points de contrôle soit vingt-cinq nombres flottants et des polynômes de degré 4. Notre méthode nous permet de garder des polynômes de degré 2, de ne considérer que trois points massiques de contrôle et un poids soit dix-huit nombres flottants. De plus, dans l'espace des sphères, nous n'avons pas de structure euclidienne et nous ne pouvons pas utiliser les méthodes basées sur le produit scalaire où les déterminants (ces derniers sont rattaché à la notion d'aire ou de volume et d'angle).

L'article est composé comme suit : après un rappel sur les courbes de Bézier rationnelles quadratiques ayant des points massiques de contrôle et la modélisation d'une branche d'hyperbole permettent la détermination de cette dernière. Avant de conclure et de donner quelques perspectives, dans le paragraphe 3, nous utilisons une forme quadratique *définie*, non positive, afin de manipuler un hyperboloïde à une nappe comme une sphère unité et traçons, dessus, des cercles non connexes qui se tracent comme des hyperboles.

## 2 Rappels

Dans ce document,  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  désigne un repère orthonormé direct pour le plan euclidien orienté usuel. Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \bullet \vec{v}$ . La norme du vecteur  $\vec{u}$  est  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ .

### 2.1 Points massiques

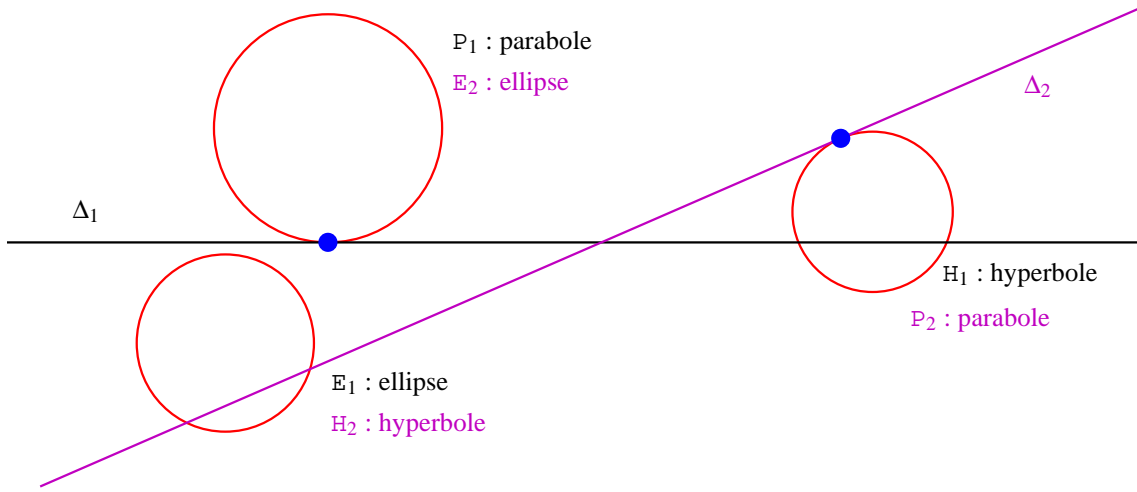
L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et des points pondérés du plan affine  $\mathcal{P}$  sont regroupés dans l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$  défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (1)$$

et il est possible d'identifier  $\tilde{\mathcal{P}}$  à  $\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$ . L'idée est de considérer le plan affine  $\mathcal{P}$  comme un hyperplan de  $\vec{\mathcal{E}}_2$  d'équation  $\omega = 1$  : la coordonnée supplémentaire  $\omega$  représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan  $\mathcal{P}$ , soit un vecteur du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés  $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$  dont la somme des poids est nul n'est pas

<sup>†</sup>. Le cône de révolution y compris.



**Figure 1:** Coniques affines, propres, lorsque nous connaissons la droite de l'infini  $\Delta_1$  ou  $\Delta_2$  dans la fermeture projective de l'espace affine.

défini. Cependant, il existe un unique vecteur  $\vec{u}$  défini par :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}, \quad (\text{avec } \sum_{i \in I} \omega_i = 0)$$

qui est indépendant du point  $M$ . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de  $\mathcal{P}$  et les vecteurs de  $\vec{\mathcal{P}}$ , identifié à l'hyperplan de  $\vec{\mathcal{E}}_2$  d'équation  $\omega = 0$ . Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle. J.-C. Fioriot et *al.* établissent une bijection entre  $\vec{\mathcal{P}}$  et  $\vec{\mathcal{E}}_2$  suivie d'une projection sur  $\mathcal{P}$  ou  $\vec{\mathcal{P}}$  selon le cas. L'espace  $\vec{\mathcal{P}}$  est aussi connu sous le nom d'espace universel.

Concrètement, nous choisissons une autre approche : toutes les sommes de points massiques sont définies en utilisant des transformations affines et nous masquons les projections sur le plan affine  $\mathcal{P}$  ou vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$ . Sur l'espace  $\vec{\mathcal{P}}$ , l'addition, notée  $\oplus$ , est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \implies$   
 $(M; \omega) \oplus (N; \mu) = (M; \omega) \oplus (N; -\omega)$   
 $= (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$
- $\omega + \mu \neq 0 \implies$   
 $(M; \omega) \oplus (N; \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$   
 où  $\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}$  désigne le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$
- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\vec{u}}^{\perp \vec{u}}(M); \omega \right)$  où  $\mathcal{T}_{\vec{u}}$  est la translation de  $\mathcal{P}$  de vecteur  $\vec{u}$ .

Sur l'espace  $\vec{\mathcal{P}}$ , la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , est définie de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

La figure 2 donne une interprétation géométrique de la somme  $\oplus$  et du produit  $\odot$  dans l'hyperplan  $\mathcal{H}_y$  d'équation  $y = 0$  de  $\vec{\mathcal{P}}$  et permet de retrouver l'associativité du barycentre. A partir de la relation :

$$(G_1; 3) = (M; 2) \oplus (N; 1)$$

nous avons :

$$(G_1; 3) \oplus (N; 1) = (M; 2) \oplus (N; 2) = (G_2; 4)$$

qui définit le point  $(G_2; 1)$  comme intersection de la droite passant par les points  $O_{\vec{\mathcal{E}}_2}$  et  $G_2^4 = (G_2; 4)$  avec le plan  $\mathcal{P}$ . Le point  $G_2$  est le milieu du segment défini par  $N \equiv (N; 1)$  et  $M \equiv (M; 1)$ .

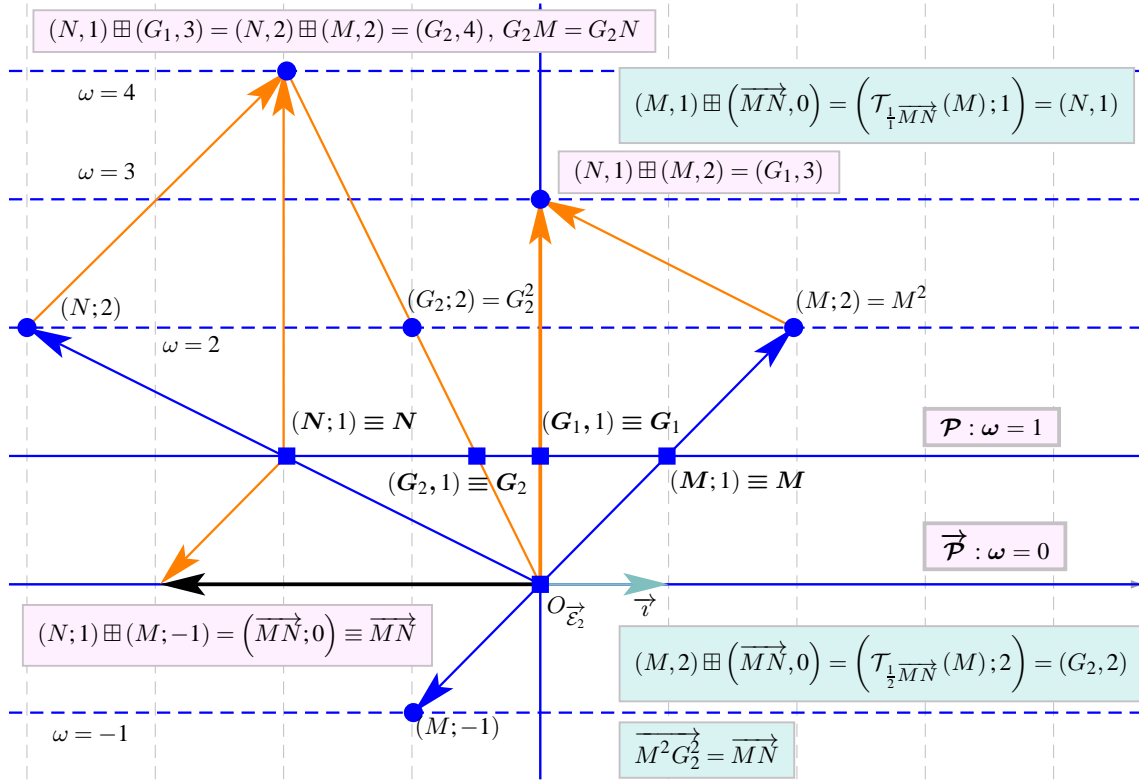
Afin d'avoir l'écriture vectorielle usuelle dans  $\vec{\mathcal{E}}_2$ , le point massique  $(M; \omega)$  de poids non nul sera noté  $M^\omega$ . Toujours dans  $\mathcal{H}_y$ ,  $(M; 2) \oplus (\overrightarrow{MN}; 0)$  se traduit, sur la droite d'équation  $\omega = 2$ , par :

$$\overrightarrow{M^2 G_2} = \overrightarrow{MN}$$

tandis que sur la droite d'équation  $\omega = 1$ , nous avons :

$$\overrightarrow{M G_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MN}$$

Dans  $\vec{\mathcal{P}}$ , la somme  $(M; \omega_0) \oplus (\vec{u}; 0)$  traduit une translation de vecteur  $\vec{u}$  dans l'hyperplan d'équation  $\omega = \omega_0$ , qui



**Figure 2:** plusieurs exemples d'interprétation géométrique de la somme  $\oplus$  et du produit  $\odot$  dans l'hyperplan d'équation  $y = 0$  de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

via l'homothétie  $\overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{\omega_0}}$  se traduit dans le plan affine  $\mathcal{P}$  par une translation de vecteur  $\frac{1}{\omega_0} \vec{u}$ . De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} (M; 1) \oplus (N; 1) &= (M; 2) \oplus (M; -1) \oplus (N; 1) \\ &= (M; 2) \oplus (\overrightarrow{MN}; 0) \\ &= (G_2; 2) \end{aligned}$$

et nous généralisons l'associativité du barycentre aux vecteurs. M. Fiorot et *al.* utilisent les opérations vectorielles dans  $\vec{E}_2$  c'est-à-dire que la somme  $(M; 1) \oplus (N; 1)$  est écrite :

$$1 \overrightarrow{O_{\vec{E}_2} M} + 1 \overrightarrow{O_{\vec{E}_2} N} = 2 \overrightarrow{O_{\vec{E}_2} G_2^2}$$

puis le point  $G_2$  de poids 2 est obtenu par projection de  $G_2^2$  sur le plan affine : contrairement aux coordonnées homogènes, le poids n'est pas touché par cette projection. Pour des compléments sur cet espace, le lecteur peut consulter les ouvrages de messieurs Fiorot et Jeannin [FJ89, FJ92], la thèse de J. P. Bécar [Béc97] ou l'article de R. Goldman [Gol02].

D'un point de vue pédagogique et didactique, nous écrivons les points massiques soit comme points (de  $\mathcal{P}$ ) pondérés, soit comme vecteurs (de  $\vec{\mathcal{P}}$ ) de poids nul en faisant bien la distinction point-vecteur.

La relation de Chasles s'écrit :

$$(B; 1) \oplus (A; -1) = (B; 1) \oplus (C; -1) \oplus (C; 1) \oplus (A; -1)$$

puisque nous avons :

$$\begin{aligned} (B; 1) \oplus (A; -1) &= (\overrightarrow{AB}; 0) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}; 0) \\ &= (\overrightarrow{CB}; 0) \oplus (\overrightarrow{AC}; 0) \\ &= (B; 1) \oplus (C; -1) \oplus (C; 1) \oplus (A; -1) \end{aligned}$$

## 2.2 Courbes BR dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Nous appelons courbe BR toute courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle. Rappelons les expressions des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_2(t) = t^2 \quad (2)$$

que nous considérons sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Les points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique sont des points massiques (i.e. des points pondérés de  $\mathcal{P}$  ou des vecteurs de  $\vec{\mathcal{P}}$ ) que nous supposons non alignés c'est-à-dire :

- si  $\prod_{i=0}^2 \omega_i \neq 0$ , il s'agit de la notion usuelle ;
- si  $\omega_i = 0$  et les deux autres poids sont non nuls, le vecteur  $\vec{P}_i$  n'est pas un vecteur directeur de la droite engendrée par les deux autres points ;
- si  $\omega_i = 0$  et  $\omega_j = 0$ , avec  $i \neq j$ , les vecteurs  $\vec{P}_i$  et  $\vec{P}_j$  ne sont pas colinéaires.

**Définition 1** : courbe BR dans  $\tilde{\mathcal{P}}$

Soit  $\omega_0, \omega_1$  et  $\omega_2$  trois réels non tous nuls. Soit  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  trois points massiques de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Soit  $I$  (resp.  $J$ ) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit la fonction  $\omega_f$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t) \quad (3)$$

Un point massique  $(M; \omega)$  ou  $(\vec{u}; 0)$  appartient à la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ , s'il existe un réel  $t_0$  de  $[0; 1]$  tel que :

- si  $\omega_f(t_0) \neq 0$  alors, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\ + \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \\ \omega = \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (4)$$

- si  $\omega_f(t_0) = 0$  alors, nous avons :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} + \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \quad (5)$$

Remarquons que dans la formule (4), nous avons une partie affine (i.e. un calcul de barycentre dont la somme des poids vaut 1) :

$$\frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i}$$

et une partie vectorielle :

$$\frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i$$

Si  $J = \emptyset$ , nous retrouvons la définition classique des courbes BR et le discriminant réduit du dénominateur  $\omega_f(t_0)$  de cette dernière, formule (3), est :

$$\Delta' = \omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 \quad (6)$$

d'où le résultat suivant :

- ★ si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 = 0$  alors le dénominateur s'annule une et une seule fois et la conique est une parabole ;
- ★ si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 > 0$  alors le dénominateur s'annule deux fois et la conique est une hyperbole ;

- ★ si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 < 0$  alors le dénominateur ne s'annule pas et la conique est une ellipse ;

et ce résultat ne change pas si  $J \neq \emptyset$ , le lecteur intéressé peut se reporter à la proposition 5.1.6 de [FJ89].

Introduisons la notation suivante :

**Notation 1** :

La notation  $BR\{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$  désigne une courbe BR de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ .

La notation  $\overline{BR}\{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$  désigne la conique propre contenant l'arc de courbe définie par  $BR\{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ .

La courbe BR étant définie à partir de vecteurs et de points pondérés dont la somme des poids vaut 1, elle ne dépend pas du point  $O$  choisi.

En utilisant les additions et multiplications définies dans le cadre du formalisme des points massiques, dans le cas où  $(P; \omega)$  est un point de la courbe BR vérifiant  $\omega \neq 0$ , nous aurions la notation suivante :

$$\begin{aligned} (P; 1) &= \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot \left( \bigoplus_{i \in I} B_i(t_0) \odot (P_i; \omega_i) \right) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot \left( \bigoplus_{i \in J} B_i(t_0) \odot (\vec{P}_i; 0) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\bigoplus$  désigne une somme pour la loi  $\oplus$ .

La formule (7) se simplifie en :

$$\begin{aligned} (P; 1) &= \sum_{k \in I} \left( P_k; \frac{\omega_k B_k(t_0)}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \right) \\ &\oplus \left( \bigoplus_{k \in J} \left( \frac{B_k(t_0)}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \vec{P}_k; 0 \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Le point massique  $(\vec{u}; 0)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\vec{u}; 0) &= \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \odot (\overrightarrow{OP_i}; 0) \\ &\oplus \left( \bigoplus_{i \in J} B_i(t_0) \odot (\vec{P}_i; 0) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

### 2.3 Détermination des paramètres d'une hyperbole

A partir d'une courbe de Bézier quadratique à points pondérés de contrôle représentant un arc d'hyperbole, il est

possible d'effectuer des changements de paramétrisations [Béc97, BG14] ce qui va induire une modification des points massiques de contrôle et permettre d'arriver la cette configuration finale donnée par le théorème 1. La courbe BR, représentant une branche de l'hyperbole a, pour premier et dernier points massiques de contrôle, deux vecteurs de même norme et pour point de contrôle intermédiaire un point pondéré de poids 1. Il reste à déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole et nous pouvons énoncer :

**Théorème 1** : Eléments caractéristiques de l'Hyperbole  
Considérons les deux courbes :

$$BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$$

d'une part et :

$$BR\left\{\left(\vec{W}_0;0\right);(Q_1;1);\left(\vec{W}_2;0\right)\right\}$$

d'autre part, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les représentations idoines [Béc97, BG14].

Posons :

$$\vec{v} = \frac{1}{a} \frac{1}{2} (\vec{W}_0 + \vec{W}_2) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\|\vec{W}_0 + \vec{W}_2\|}{2} \quad (10)$$

et :

$$\vec{j} = \frac{1}{b} \frac{1}{2} (\vec{W}_0 - \vec{W}_2) \quad \text{avec} \quad b = \frac{\|\vec{W}_0 - \vec{W}_2\|}{2} \quad (11)$$

Alors :

$$\frac{BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}}{BR\left\{\left(\vec{W}_0;0\right);(Q_1;1);\left(\vec{W}_2;0\right)\right\}} =$$

est l'hyperbole de centre  $Q_1$ , d'équation implicite suivante :

$$x \times y = \frac{\|\vec{W}_0\|^2}{4}$$

dans le repère orthonormé  $\left(Q_1; \frac{1}{\|\vec{W}_0\|} \vec{W}_0; \frac{1}{\|\vec{W}_2\|} \vec{W}_2\right)$ , et d'équation :

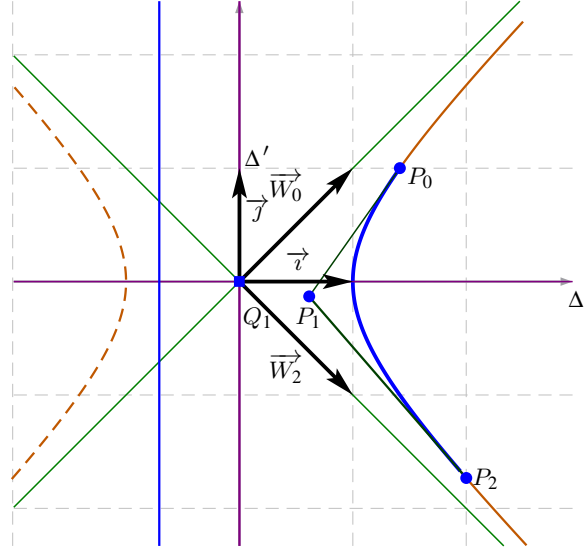
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans le repère orthonormé  $(Q_1; \vec{v}; \vec{j})$ .

Démonstration : Voir [Béc97].

■

La figure 3, montre deux arcs d'une hyperbole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points massiques de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $\left(P_1; \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2}}{2}\right)$  et  $(P_2;1)$  d'une part et  $(\vec{W}_0;0)$ ,  $(Q_1;1)$  et  $(\vec{W}_2;0)$  d'autre part. Cette dernière



**Figure 3**: Deux arcs d'une hyperbole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points massiques de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $\left(P_1; \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2}}{2}\right)$  et  $(P_2;1)$  d'une part et  $(\vec{W}_0;0)$ ,  $(Q_1;1)$  et  $(\vec{W}_2;0)$  d'autre part.

nous permet de déterminer les paramètres de l'hyperbole en utilisant le théorème 1

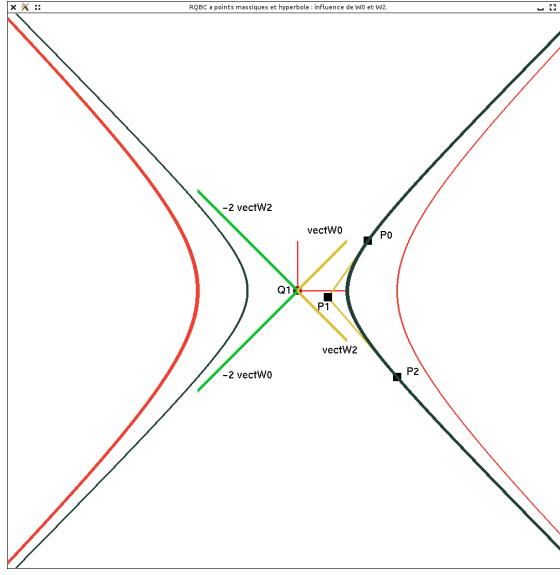
La figure 4 montre les courbes  $BR\left\{\left(\vec{W}_0;0\right);(Q_1;1);\left(\vec{W}_2;0\right)\right\}$  et  $BR\left\{\left(-\vec{W}_0;0\right);(Q_1;1);\left(-\vec{W}_2;0\right)\right\}$  en vert ainsi que la courbe  $BR\left\{\left(-2\vec{W}_0;0\right);(Q_1;1);\left(-2\vec{W}_2;0\right)\right\}$  en rouge. Plus la norme des vecteurs  $\vec{W}_0$  et  $\vec{W}_2$  est grande, plus les sommets de l'hyperbole sont éloignés du centre  $Q_1$ .

Dans le paragraphe suivant, nous choisissons une quadrique propre (un hyperboloïde à une nappe) ainsi que la forme quadratique idoine  $\mathcal{Q}$ , afin de voir la quadrique comme une sphère unité. La forme bilinéaire associée à  $\mathcal{Q}$  est  $\mathcal{L}$ .

L'espace affine à trois dimensions est noté  $\mathcal{E}_3$ , l'espace vectoriel attaché à  $\mathcal{E}_3$  est  $\vec{\mathcal{E}}_3$ . L'espace  $\mathcal{E}_3$  est muni du repère  $(O; \vec{v}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé direct pour la structure euclidienne usuelle.

### 3 Coniques et droites sur un hyperboloïde à une nappe vue comme une sphère unité

Une conique est souvent définie comme section d'un cône de révolution par un plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ , mais ceci présente un désavantage : le sommet du cône est un point singulier. Nous allons utiliser une surface réglée, sans point singulier, définie par une équation telle que la forme quadratique associée



**Figure 4:** Illustration de l'influence des vecteurs directeurs des asymptotes.

ne soit pas dégénérée : le choix est l'hyperboloïde H de révolution à une nappe, d'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (12)$$

### 3.1 Construction de la forme quadratique idoine

La forme quadratique induite par l'équation de H, formule (12), est :

$$\mathcal{Q}(\vec{u}) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (13)$$

où  $\vec{u}(x; y; z)$ . La forme bilinéaire, symétrique, associée à  $\mathcal{Q}$  est notée  $\mathcal{L}$ .

Pour définir le plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  souhaité, il suffit de se donner :

- deux nombres réels  $\alpha_0$  et  $p$ ;
- un point  $A_0(0; 0; p)$ ;
- un vecteur orthogonal  $\ddagger \overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}(0; \alpha_0; 1)$  au plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ .

La signature de la forme quadratique  $\mathcal{Q}$  étant (2; 1), nous pouvons définir le type du plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  et de vecteurs de  $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}$  en fonction de  $\alpha_0$ , cf. tableau 1.

Soit  $M(x; y; z)$ . Le point  $M$  appartient à  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  ssi

$$\mathcal{L}\left(\overrightarrow{A_0M}; \overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}\right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$0x + \alpha_0 y - (z - p) = 0$$

$\ddagger$ . Pour la forme quadratique  $\mathcal{Q}$ .

ce qui fait que l'équation du plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  est :

$$z = \alpha_0 y + p \quad (14)$$

Étudions la restriction  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  de la forme quadratique  $\mathcal{Q}$  à  $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}$ . Soit  $M_0(x_0; y_0; \alpha_0 y_0 + p)$  et  $M_1(x_1; y_1; \alpha_0 y_1 + p)$  deux points de  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ . Nous avons :

$$\overrightarrow{M_0M_1} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ \alpha_0(y_1 - y_0) \end{pmatrix}$$

et en posant  $X = x_1 - x_0$  et  $Y = y_1 - y_0$ , nous obtenons :

$$\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}(\overrightarrow{M_0M_1}) = X^2 + (1 - \alpha_0^2) Y^2 \quad (15)$$

et nous pouvons énoncer :

**Proposition 1 :** Type de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$

Le type  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  dépend de  $\alpha_0$  et nous pouvons énoncer :

- si nous avons  $|\alpha_0| < 1$ , la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est définie positive, de signature (2; 0);
- si nous avons  $|\alpha_0| = 1$ , la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est dégénérée, de signature (1; 0);
- si nous avons  $|\alpha_0| > 1$ , la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est définie, de signature (1; 1).

Démonstration : il suffit d'utiliser la formule (15).

■

Notons que nous avons une relation univoque entre la signature de  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  et le type du vecteur gradient  $\overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}$  au plan  $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}$  :

- si la signature de  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est (2; 0) alors  $\overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}$  est de type temps;
- si la signature de  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est (1; 0) alors  $\overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}$  est de type lumière;
- si la signature de  $\mathcal{Q}_{|\overrightarrow{\mathcal{P}_{\alpha_0}}}$  est (1; 1) alors  $\overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}$  est de type espace.

### 3.2 Construction d'une branche d'un cercle

L'algorithme 1 permet de construire une branche ou les deux branches d'un cercle non connexe modélisé par une ou deux courbe(s) de Bézier rationnelle(s) quadratique(s) à points massiques de contrôle.

La condition  $\alpha_0^2 > 1$  implique que le vecteur gradient  $\overrightarrow{\nabla \mathcal{P}_{\alpha_0}}$  est de type espace ce qui implique que la signature de la restriction de la forme quadratique au plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  est (1; 1) : le cercle obtenu est non connexe, a deux asymptotes et se trace comme une hyperbole.



Type du vecteur ou du 2-plan	$\alpha_0$	Vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$	plan $\mathcal{P}_H$
Espace	$ \alpha_0  < 1$	$\mathcal{Q}(\vec{u}) > 0$	$\mathcal{Q}_{ \mathcal{P}_{\alpha_0}} \rightarrow$ est définie positive
Temps	$ \alpha_0  > 1$	$\mathcal{Q}(\vec{u}) < 0$	$\mathcal{Q}_{ \mathcal{P}_{\alpha_0}} \rightarrow$ est définie, de signature (1;1)
Lumière	$ \alpha_0  = 1$	$\mathcal{Q}(\vec{u}) = 0$	$\mathcal{Q}_{ \mathcal{P}_{\alpha_0}} \rightarrow$ est dégénérée, de signature (1;0)

**Table 1:** Définition des trois types de vecteurs ou de plans  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  en fonction de  $\alpha_0$  et de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}} \rightarrow$ .

**Algorithme 1** Construction des branches d'un arc de cercle sur une sphère unité qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe.

**Entrée :** Un point  $A_0(0;0;p)$  du plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  ainsi qu'un vecteur orthogonal  $\vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0}(0;\alpha_0;1)$  à  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ .

**Condition :**  $\alpha_0^2 > 1$

1. Construction de  $O_0$ , centre du cercle dans le plan passant par  $A_0$  et de vecteur normal  $\vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0}$  en utilisant la formule (17).
2. Calcul de :

$$Y_0 = \frac{\sqrt{|\alpha_0^2 - p^2 - 1|}}{\alpha_0^2 - 1}$$

3. Calcul des vecteurs lumière  $\vec{W}_0$  et  $\vec{W}_2$  :

$$\begin{cases} \vec{W}_0 = (\sqrt{(\alpha_0^2 - 1)Y_0^2}; Y_0; \alpha_0 Y_0) \\ \vec{W}_2 = (\sqrt{(\alpha_0^2 - 1)Y_0^2}; -Y_0; -\alpha_0 Y_0) \end{cases} \quad (16)$$

4. Si  $\mathcal{Q}(\vec{OO}_0) > 0$  alors  $\vec{W}_2 = -\vec{W}_2$ .

**Sortie :** les branches de cercle  $BR\{(\vec{W}_0;0);(O_0;1);(\vec{W}_2;0)\}$  et  $BR\{(-\vec{W}_0;0);(O_0;1);(-\vec{W}_2;0)\}$

Le point 1. de l'algorithme 1 est très facile à déterminer, il suffit de résoudre une équation du premier degré puisque nous avons :

$$\vec{OO}_0 = t \vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0}, t \in \mathbb{R}$$

et :

$$\mathcal{L}(\vec{OA}_0, \vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0}) = 0$$

ce qui conduit à :

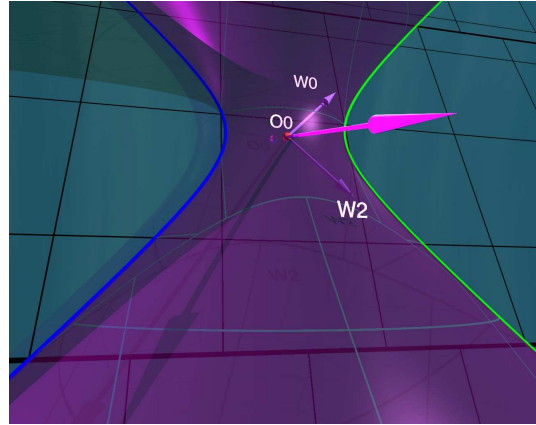
$$\vec{OO}_0 = \frac{\mathcal{L}(\vec{OA}_0, \vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0})}{\mathcal{Q}(\vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0})} \vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0} \quad (17)$$

et l'existence de  $O_0$  est garantie par le fait que  $\mathcal{Q}(\vec{\nabla}\mathcal{P}_{\alpha_0})$  est non nul : comme dans le cas d'une sphère euclidienne, le centre du cercle est la projection orthogonale du centre de la sphère sur le plan du cercle.

Nous avons deux types de branches en fonction de la position du centre du cercle, figures 5 et 6. La condition donnée dans le point 4. de l'algorithme 1 est équivalente à :

$$\alpha_0^2 - p^2 - 1 < 0$$

et traduit le fait que le centre du cercle est à l'extérieur de la sphère.



**Figure 5:** Deux branches d'un cercle  $BR\{(\vec{W}_0;0);(O_0;1);(\vec{W}_2;0)\}$  et  $BR\{(-\vec{W}_0;0);(O_0;1);(-\vec{W}_2;0)\}$ , sur une sphère unité qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe avec  $\alpha_0 = 3$  et  $p = 2$ .

La figure 5 montre les deux branches  $BR\{(\vec{W}_0;0);(O_0;1);(\vec{W}_2;0)\}$  d'une part et

$BR\left\{\left(-\vec{W}_0;0\right);(O_0;1);\left(-\vec{W}_2;0\right)\right\}$  d'autre part, d'un cercle non connexe sur la sphère unité  $H$ . Le centre du cercle est à l'intérieur de la boule unité i.e. vérifie :

$$0 \leq \mathcal{Q}\left(\overrightarrow{OO_0}\right) < 1 \quad (18)$$

et d'après le théorème de Pythagore, le rayon  $r_0$  du cercle vérifie :

$$0 < r_0^2 = 1 - \mathcal{Q}\left(\overrightarrow{OO_0}\right) \leq 1 \quad (19)$$

Le vecteur non nommé, de couleur magenta, et non contenu dans le plan est le gradient à ce dernier et nous avons  $\alpha_0 = 3$  et  $p = 2$  d'où :

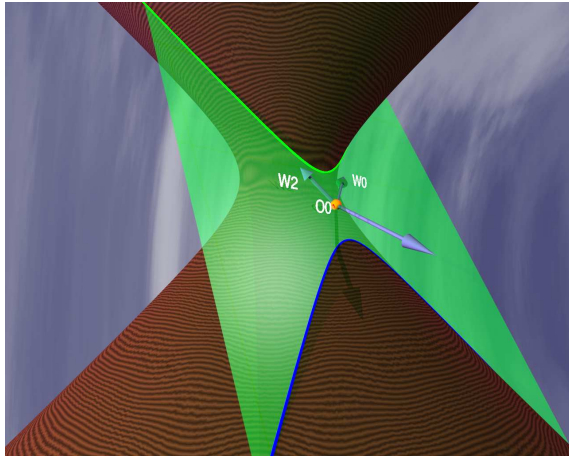
$$\alpha_0^2 - p^2 - 1 = 9 - 4 - 1 = 4 > 0$$

et le centre  $O_0\left(0; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$  est bien à l'intérieur de la sphère. Nous obtenons  $Y_0 = \frac{1}{4}$ . Les vecteurs lumière sont :

$$\vec{W}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

et :

$$\vec{W}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$



**Figure 6:** Deux branches d'un cercle  $BR\left\{\left(\vec{W}_0;0\right);(O_0;1);\left(\vec{W}_2;0\right)\right\}$  et  $BR\left\{\left(-\vec{W}_0;0\right);(O_0;1);\left(-\vec{W}_2;0\right)\right\}$ , sur une sphère unité qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe avec  $\alpha_0 = 2$  et  $p = 2$ .

La figure 6 montre les deux branches  $BR\left\{\left(\vec{W}_0;0\right);(O_0;1);\left(\vec{W}_2;0\right)\right\}$  d'une part et  $BR\left\{\left(-\vec{W}_0;0\right);(O_0;1);\left(-\vec{W}_2;0\right)\right\}$  d'autre part, d'un cercle non connexe sur la sphère unité  $H$ . Le centre du cercle

est à l'extérieur de la boule unité i.e. vérifie :

$$\mathcal{Q}\left(\overrightarrow{OO_0}\right) > 1 \quad (20)$$

et d'après le théorème de Pythagore, le rayon  $r_0$  du cercle vérifie :

$$r_0^2 = 1 - \mathcal{Q}\left(\overrightarrow{OO_0}\right) < 0 \quad (21)$$

Le vecteur non nommé, de couleur violet, et non contenu dans le plan est le gradient à ce dernier et nous avons  $\alpha_0 = 2$  et  $p = 2$  d'où :

$$\alpha_0^2 - p^2 - 1 = 4 - 4 - 1 = -1 < 0$$

et le centre  $O_0\left(0; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$  est à l'extérieur de la sphère.

Nous obtenons  $Y_0 = \frac{1}{3}$ . Les vecteurs lumière sont :

$$\vec{W}_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

et :

$$\vec{W}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Jusqu'à maintenant, le centre du cercle était soit dans la boule unité, formule (18) et le carré du rayon était strictement positif, formule (19), soit hors de la boule unité, formule(20) et le carré du rayon était strictement négatif, formule (21), que se passe-t-il si le centre du cercle est sur la sphère unité  $H$  ?

### 3.3 Construction de cercles de rayon nul

Rappelons que dans le plan affine euclidien usuel, l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c$$

est celle d'une hyperbole si  $c$  est non nul. Dans le cas contraire, nous avons l'équation de deux droites qui sont les asymptotes des hyperboles précédentes. Dans le paragraphe 3.2, nous avons construit des courbes telles que le centre ne soit pas sur la sphère unité et les rayons étaient soit strictement négatif, soit strictement positif. Dans ce paragraphe, nous traitons le cas où le centre  $O_0$  appartient à cette sphère, et d'après le théorème de Pythagore, le rayon  $r_0$  du cercle vérifie :

$$r_0^2 = 1 - \mathcal{Q}\left(\overrightarrow{OO_0}\right) = 1 - 1 = 0 \quad (22)$$

et nous obtenons l'union de deux droites. Notons que dans le cas du plan, pour la métrique définie par une hyperbole de demi-axes  $a$  et  $b$ , d'équation paramétrique :

$$t \mapsto \left(\frac{a}{\cos(t)}; b \tan(t)\right)$$

nous avons les propriétés suivantes [Dru13] :

- cette hyperbole est un cercle de rayon 1 ;

- l'union de ses asymptotes est un cercle de rayon nul ;
- les vecteurs positions tangents à cette hyperbole forment un cercle dual dont le rayon au carré vaut  $-1$ .

Rappelons que si  $\{E\}$  est un ensemble constitué de points massiques, non tous de masse nul, la notation  $\text{Aff}\{E\}$  désigne l'espace affine engendré par les éléments de  $\{E\}$ .

Nous pouvons énoncer :

**Théorème 2 :**

Soit  $O_0(x_0; y_0; z_0)$  un point de  $H$ .

Soit les vecteurs  $\vec{l}_\varepsilon$  lumière :

$$\vec{l}_\varepsilon \left( \frac{1}{x_0} \frac{-y_0 x_0^2 + \varepsilon z_0 |x_0|}{x_0^2 - z_0^2}; 1; \frac{-y_0 z_0 + \varepsilon |x_0|}{x_0^2 - z_0^2} \right)$$

avec  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ , non colinéaires tel que :

$$\mathcal{P}_{\alpha_0} = \mathcal{T}_{O_0 H} = \text{Aff} \left\{ O_0; \vec{l}_{-1}; \vec{l}_1 \right\} \quad (23)$$

Alors  $\text{Aff} \left\{ O_0; \vec{l}_{-1} \right\}$  et  $\text{Aff} \left\{ O_0; \vec{l}_1 \right\}$  sont deux droites sur  $H$ .

**Démonstration :** Le plan affine  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  contient  $O_0$  et a pour vecteur normal le vecteur  $\vec{OO}_0$ , colinéaire au gradient  $\vec{\nabla} \mathcal{P}_{\alpha_0}$  de  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  : le plan  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  est le plan tangent à  $H$  en  $O_0$ .

La droite  $\text{Aff} \left\{ O_0; \vec{l}_1 \right\}$  est l'ensemble des points  $M(t)$  vérifiant :

$$\vec{O_0 M}(t) = \vec{l}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

d'où :

$$\vec{OM}(t) = \vec{OO}_0 + \vec{l}_1$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}}(\vec{OM}(t)) &= \mathcal{Q}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}}(\vec{OO}_0 + \vec{l}_1) \\ &= \mathcal{Q}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}}(\vec{OO}_0) + 2 \underbrace{\mathcal{L}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}}(\vec{OO}_0; \vec{l}_1)}_{=0 \text{ car } \vec{l}_1 \in \mathcal{T}_{O_0 H}} \\ &\quad + \underbrace{\mathcal{Q}_{|\mathcal{P}_{\alpha_0}}(\vec{l}_1)}_{=1 \text{ car } \vec{l}_1 \text{ est un vecteur lumière}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que le point  $M(t)$  appartient à  $H_1$

La seconde partie concernant la droite  $\text{Aff} \left\{ O_0; \vec{l}_{-1} \right\}$  se fait de façon analogue.

§. Si  $x_0 = 0$  ou  $x_0^2 = z_0^2$  (i.e.  $y_0^2 = 1$ ), il suffit de permuter les rôles de  $x$  et  $y$ .

Il reste à déterminer les vecteurs lumière  $\vec{l}_{-1}$  et  $\vec{l}_1$ . Pour ce faire, il suffit de résoudre, pour  $\vec{l}_\varepsilon(X_0; Y_0; -Z_0)$  :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(\vec{l}_\varepsilon) = 0 = X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2 \\ \mathcal{L}(\vec{l}_\varepsilon; \vec{OO}_0) = 0 = x_0 X_0 + y_0 Y_0 + z_0 Z_0 \end{cases}$$

Sans perte de généralités, nous pouvons supposer  $x_0 \neq 0$ ,  $x_0 \neq z_0$  et  $Y_0 = 1$  (quitte à permuter les rôles des abscisses et des ordonnées), nous obtenons :

$$X_0 = \frac{-y_0 - z_0 Z_0}{x_0}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{y_0 z_0 - \varepsilon |x_0|}{x_0^2 - z_0^2} \\ X_0 = \frac{1}{x_0} \frac{-y_0 x_0^2 + \varepsilon z_0 |x_0|}{x_0^2 - z_0^2} \end{cases}, \quad \varepsilon \in \{-1; 1\}$$

et nous obtenons :

$$\vec{l}_\varepsilon \left( \frac{1}{x_0} \frac{-y_0 x_0^2 + \varepsilon z_0 |x_0|}{x_0^2 - z_0^2}; 1; \frac{-y_0 z_0 + \varepsilon |x_0|}{x_0^2 - z_0^2} \right)$$

avec  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ .

■

Notons que le gradient en  $O_0(x_0; y_0; z_0)$  est :

$$\vec{\nabla} \mathcal{P}_{O_0}(2x_0; 2y_0; 2z_0)$$

et nous retrouvons que le gradient à une sphère en un point  $O_0$  est colinéaire au vecteur  $\vec{OO}_0$  où  $O$  est le centre de la sphère. Ainsi, une équation implicite de  $\mathcal{T}_{O_0 H}$ , formule (23), est :

$$\mathcal{L}(\vec{O_0 M}; \vec{\nabla} \mathcal{P}_{O_0}) = 0$$

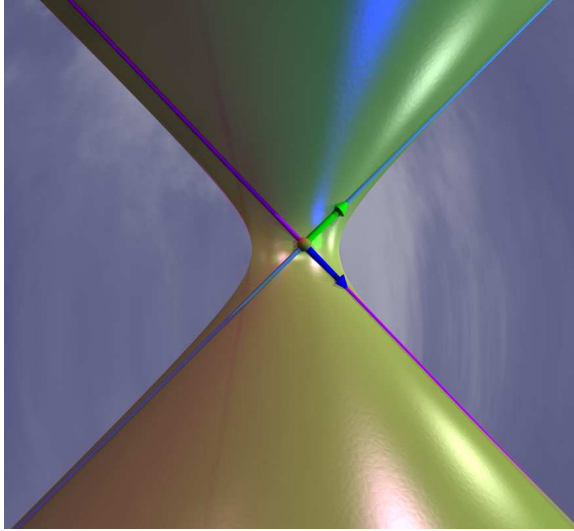
où  $M(x; y; z)$ . De plus, nous avons :

$$\mathcal{Q}(\vec{\nabla} \mathcal{P}_{\alpha_0}) = \mathcal{Q}(2 \vec{OO}_0) = 4 \mathcal{Q}(\vec{OO}_0) = 4 > 0$$

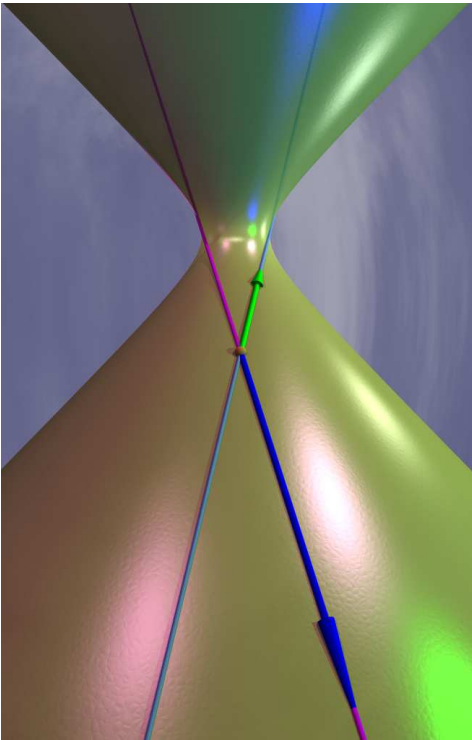
ce qui montre que le plan tangent en  $O_0$  est de type temps : une direction orthogonale au plan est de type espace, le plan peut donc être engendré par  $O_0$ , un vecteur de type espace et un vecteur de type temps.

La figure 7 montre, sur la sphère unité, deux droites passant par le point  $O_0(1; 0; 0)$  et de vecteurs directeurs lumière respectifs  $\vec{l}_1(0; 1; 1)$ , en vert, d'une part et  $\vec{l}_{-1}(0; 1; -1)$ , en bleu, d'autre part.

La figure 8 montre, sur la sphère unité, deux droites passant par le point  $O_0\left(\frac{10}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{373}}{6}\right)$  et pour vecteurs directeurs respectifs, les deux vecteurs lumière  $\vec{l}_1\left(\frac{20-2\sqrt{373}}{9}; 1; \frac{40-\sqrt{373}}{9}\right)$  en vert, d'une part et  $\vec{l}_{-1}\left(\frac{20+2\sqrt{373}}{9}; 1; -\frac{40+\sqrt{373}}{9}\right)$  en bleu, d'autre part.



**Figure 7:** Un cercle de rayon nul, union de deux droites sur une sphère unité qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe passant par  $O_0(1;0;0)$  et de vecteurs directeur lumière respectifs  $\vec{l}_1^+(0;1;1)$  et  $\vec{l}_1^-(0;1;-1)$ .



**Figure 8:** Un cercle de rayon nul, union de deux droites, passant par  $O_0\left(\frac{10}{3}; -\frac{3}{2}; -3,219\right)$ , sur une sphère unité qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe :  $\vec{l}_1^+(6,514;1;-6,590)$  et  $\vec{l}_1^-( -2,070;1;2,299)$ .

## 4 Conclusion et perspectives

### Conclusion

Dans cet article, nous avons généralisé la notion de barycentre et regroupé dans le même ensemble, celui des points massiques, les points pondérés de poids non nul du plan affine et les vecteurs du plan vectoriel muni d'un poids nul. Dans cet espace, nous avons ensuite généralisé les courbes de Bézier rationnelles quadratiques et, en partant de la définition classique représentant un arc connexe d'hyperbole, nous avons effectué quelques reparamétrisations afin de représenter une branche de cette même hyperbole : les premier et dernier points massiques de contrôle de la courbe de Bézier sont deux vecteurs, de même norme et directeurs de chacune des asymptotes de cette hyperbole. Nous avons aussi pu déterminer les paramètres de cette hyperbole à partir de cette représentation.

Dans une seconde partie, paragraphe 3, nous avons proposé une application qui n'est ni possible avec la représentation classique, ni en utilisant les coordonnées homogènes. Nous avons choisi une surface doublement réglée, un hyperboloïde de révolution à une nappe, ainsi qu'une forme quadratique de signature  $(2;1)$  afin de manipuler cette quadrique comme une sphère unité. En utilisant cette même forme quadratique, nous avons pu tracer sur la sphère unité des branches de cercles (de rayon non nul) qui se tracent comme des hyperboles et des branches de cercles de rayon nul qui sont l'union de deux droites. Le choix de cet exemple a été motivé par d'autres applications dans l'espace des sphères orientées de l'espace de Lorentz [LS11, LW08, LO08, DFGL14].

### Perspectives

L'espace de Lorentz est  $\mathbb{R}^5$  muni d'une forme quadratique de signature  $(4;1)$ . Dans cet espace, nous avons un modèle isométrique à  $\mathbb{R}^3$  où les points sont modélisés par des vecteurs de type lumière. De plus, la sphère unité  $\Lambda^4$ , de dimension 4, appelée espace des sphères, de l'espace de Lorentz représente les sphères et plans orientés de  $\mathbb{R}^3$ . Les surfaces canal de  $\mathbb{R}^3$  deviennent des courbes sur  $\Lambda^4$ . Sur cette sphère unité, les cercles qui se tracent comme des hyperboles sont soit des faisceaux de sphères de Poncelet ou à points limite, soit des cyclides de Dupin (cônes de révolution compris) ayant deux points singuliers (i.e. des sphères de rayon nul) et l'utilisation des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points massiques de contrôle permet de représenter ces courbes très simplement.

Dans un futur plus lointain, nous envisageons comme autre application de l'espace des sphères, d'utiliser une inversion idoine afin de transformer l'espace des sphères  $\Lambda^4$  en hyperplan, tracer une courbe de Bézier dans cet hyperplan, puis par cette même inversion, obtenir une courbe de Bézier sur l'espace des sphères représentant une surface canal i.e.

une courbe de classe  $C^1$  sur  $\Lambda^4$  telle que tous les vecteurs dérivés soient de type espace et tel que tous les vecteurs géodésiques soient de type temps [LS11]. Nous devons nous atteler à ce dernier problème c'est-à-dire quelles sont les conditions sur la courbe de l'hyperplan, image de  $\Lambda^4$  par une inversion idoïne, pour que la courbe obtenue sur l'espace des sphères vérifient bien ces deux conditions. Nous envisageons aussi de prolonger ce travail aux surfaces à squelette curviligne pour générer des surfaces canal.

## Références

- [Alb01] G. Albrecht. Determination of geometrical invariants of rationally parametrized conic sections. pages 15–24, 2001.
- [BG14] J. P. Bécar and L. Garnier. Points massiques, courbes de bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014*, Lyon, 26 - 27 mars 2014. LIRIS. [http://liris.cnrs.fr/gtmg2014/actes\\_gtmg.tar.gz](http://liris.cnrs.fr/gtmg2014/actes_gtmg.tar.gz).
- [Béc97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [Béz86] P. Bézier. *Courbe et surface*, volume 4. Hermès, Paris, 2ème édition, Octobre 1986.
- [Cas85] P. De Casteljaeu. *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermès, 1985.
- [DFGL14] L. Druoton, L. Fuchs, L. Garnier, and R. Langevin. The Non-Degenerate Dupin Cyclides in the Space of Spheres Using Geometric Algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(2) :515–532, June 2014.
- [DGL<sup>+</sup>10] L. Druoton, L. Garnier, R. Langevin, F. Sulpice, and R. Besnard. Les cyclides de dupin et l'espace des sphères. *AFIG 2010*, pages 147–155, 2010.
- [Dru13] L. Garnier & L. Druoton. Inversion de coniques à centre vue comme des cercles. In *Actes of the 26<sup>èmes</sup> journées AFIG*, page Session Géométrie, Limoges, France, Novembre 2013.
- [Fan02] Lian Fang. A rational quartic bezier representation for conics. *Comput. Aided Geom. Des.*, 19(5) :297–312, May 2002.
- [FJ89] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, volume RMA 24. Masson, 1992.
- [Gar10] L. Garnier. Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 4(1) :21–56, 2010.
- [GDL12] L. Garnier, L. Druoton, and R. Langevin. Subdivisions itératives d'arcs d'ellipses et d'hyperboles et application à la visualisation de cyclides de Dupin. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 6(2) :1–36, 2012.
- [Gol02] Ron Goldman. On the algebraic and geometric foundations of computer graphics. *ACM Trans. Graph.*, 21(1) :52–86, January 2002.
- [GW04] R. N. Goldman and W. Wang. Using invariants to extract geometric characteristics of conic sections from rational quadratic parameterizations. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 14(3) :161–187, 2004.
- [Ing11] B. Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*. Calvage et Mounet, avril 2011. ISBN-13 : 978-2916352121.
- [Lee85] E.T.Y. Lee. The rational Bézier representation for conics. In G. Farin (ed.), editor, *In Geometric Modeling, Algorithms and New Trends*, SIAM, pages 3–19, Philadelphia, 1985.
- [LO08] R. Langevin and J. O'Hara. Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*, 531, janv 2008.
- [LS11] R. Langevin and G. Solanes. The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*, 11(4) :585–601, November 2011.
- [LSD<sup>+</sup>14] R. Langevin, J. C. Sifre, L. Druoton, L. Garnier, and M. Paluszny. Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics*, 2014. ISSN : 0101-8205.
- [LW08] R. Langevin and P.G. Walczak. Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*, 132(5) :135–178, 2008.
- [SR11] J. Sánchez-Reyes. Characteristics of conic segments in Bézier form. In *International Conference on Innovative Methods in Product Design*, pages 231–234, Venise, Italy, June 2011.