Introduction à la théorie du contrôle

Virginie Régnier, LAMAV, Université de Valenciennes *

L'exposé qui suit est une synthèse de différents ouvrages et travaux, en particulier ceux de Lions ([4]) et de Micu et Zuazua ([7]). La théorie du contrôle a été développée depuis la fin des années 1980 et intéresse encore aujourd'hui de nombreux chercheurs (voir la bibliographie de [7] ou [8] par exemple).

L'objectif principal est de déterminer s'il est possible, à l'aide d'un contrôle adapté (et réalisable !), de guider la solution vers une configuration finale désirée (ou bien vers une configuration proche - on parle alors de contrôlabilité approchée). On s'intéressera par la suite à la contrôlabilité exacte. L'application typique est celle des systèmes oscillants (membranes, plaques, poutres, ...) où l'on souhaite enrayer les vibrations naturelles de ces systèmes en agissant ou bien sur une partie du domaine (contrôle intérieur) ou bien à la frontière du domaine (contrôle au bord). En théorie du contrôle, il est standard d'aborder ces problèmes de manière duale. La notion duale de la contrôlabilité est appelée observabilité : c'est la possibilité de mesurer ou d'observer, par des capteurs appropriés, toute la dynamique du système par des mesures partielles effectuées sur une région adaptée au contrôle. La question d'observabilité la plus élémentaire est la suivante : est-ce que le système possède des vibrations localisées qui peuvent échapper à la région où les capteurs sont placés ? Si la réponse est oui, alors on peut immédiatement conclure que la propriété d'observabilité n'a pas lieu.
Plusieurs raisons peuvent expliquer l'existence de solutions localisées :

- des raisons géométriques : par exemple, si les domaines comportent des trous, des microvibrations peuvent se produire lorsque des ondes sont piégées entre plusieurs trous,
- lorsque le système considéré a plusieurs composantes (thermo-élasticité, déformations longitudinales et transversales, multi-structures), ce phénomène peut se produire naturellement lorsque l'énergie se concentre sur une seule composante de l'état dans des vibrations à haute fréquence,
- dans le contexte d'approximations numériques, des résonances (artificielles) peuvent se produire : elles résultent dans ce cas de l'interaction des solutions avec le maillage.

La suite va reposer sur la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) de Lions ([4]) qui établit un lien commode entre contrôlabilité et observabilité.

Le plan de l'exposé sera le suivant :

1. Définition mathématique de la contrôlabilité avec quelques exemples (dont le cas de la dimension finie) et lien avec l'observabilité.
2. Présentation de la méthode HUM sur un exemple (celui de l'équation des ondes avec contrôle au bord).
   (a) Problème et présentation des étapes de la méthode.
   (b) Détermination explicite de la contrôlabilité.
   (c) Théorèmes d'Ingham et analyse spectrale.
3. Un exemple d'application : contrôlabilité d'une chaîne de poutres d'Euler-Bernoulli connectées en séries avec points-masses ([5]).

Remerciements. Je tiens à remercier D. Mercier pour les discussions que l'on a eues sur la manière d'introduire la théorie du contrôle ainsi que pour sa relecture attentive de mon manuscrit. Merci également aux Professeurs F. Ali Mehmeti, C. De Coster, S. Nicaise et L. Paquet pour leurs remarques et questions lors du groupe de travail au cours duquel cet exposé a été présenté.

*virginie.regnier@univ-valenciennes.fr

1 Définition mathématique de la contrôlabilité et application au cas de la dimension finie.

1.1 Définition et exemples.

Dans ce paragraphe, on se limite au cas de la dimension finie. Soient $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $T > 0$. Les matrices A et B ont pour taille respective $n \times n$ et $n \times m$. La fonction $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ représente l'état du système. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état représenté par le vecteur de $\mathbb{R}^n$: x^0. Le système que l'on va étudier s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in (0,T), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1}$$

La fonction $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ est le contrôle. L'état et le contrôle sont deux fonctions du temps et uniquement du temps.
Pour toute donnée initiale x^0 dans $\mathbb{R}^n$ et toute fonction vectorielle $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$, le système (1) a une unique solution $x \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ caractérisée par la formule de variation de la constante :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \ \forall \ t \in [0,T]. \tag{2}$$

Démonstration. La solution du système homogène (i.e. avec $B = 0$) est de la forme $x(t) = e^{tA} \cdot Cte$ où Cte est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On pose alors $y(t) = e^{-tA}x(t)$ ce qui revient à faire varier la constante, notée y, avec le temps. On calcule alors la dérivée $y'(t)$ en utilisant le système (1) puis on intègre pour trouver y et donc x. On vérifie ensuite que x a bien la régularité souhaitée. ■

Définition 1. *Le système (1) est* **exactement contrôlable** *au temps $T > 0$ si, pour tout état initial x^0 et tout état final x^1 dans $\mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ tel que la solution de (1) satisfait $x(T) = x^1$.*

Notons que l'état est une fonction vectorielle à n composantes et le contrôle une fonction à m composantes. En pratique m sera plus petit que n et même le plus petit possible. Le choix de B est alors fait en fonction de la matrice A. Considérons deux exemples pour illustrer la situation. Dans les deux cas, n vaut 2 et $m = 1$.

Exemple 1 : On choisit pour A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'état du système est $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ et le contrôle u a une seule composante. Le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + u(t), t \in (0,T), \\ x_2'(t) = x_2(t), t \in (0,T), \\ x_1(0) = x_1^0, \\ x_2(0) = x_2^0. \end{cases} \tag{3}$$

Le contrôle u n'agit pas sur x_2 qui ne dépend que de x_2^0 (on a $x_2(t) = x_2^0 e^t$). Le système n'est donc pas exactement contrôlable.

Exemple 2 : On étudie l'oscillateur harmonique avec contrôle $x''(t) + x(t) = u(t)$ ce qui revient après réduction d'ordre à résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), t \in (0,T), \\ y'(t) = u(t) - x(t), t \in (0,T), \\ x(0) = x^0, \\ x'(0) = y^0. \end{cases} \tag{4}$$

Les matrices A et B sont donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois, le contrôle u agit sur les deux composantes x et y. Pour qu'il y ait contrôlabilité, il suffit de construire une fonction z du temps t qui satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l} z(0)=x^0, z(T)=x^1, \\ z'(0)=y^0, z'(T)=y^1. \end{array}\right. \tag{5}$$

On définit alors le contrôle u par $u=z''+z$ et la solution de l'équation $x''+x=u=z''+z$ avec conditions initiales $x(0)=x^0$ et $x'(T)=y^0$ coincide avec z (unicité de la solution). Par conséquent $x(T)=x^1$ et $x'(T)=y^1$ (grâce à (5)) comme requis pour la contrôlabilité exacte.
Il reste à s'assurer de l'existence d'une fonction z satisfaisant à (5). Une fonction polynomiale de degré 3 peut convenir (on choisit $z(t)=at^3+bt^2+y^0t+x^0$ où le couple (a,b) est la solution du système écrit à partir des conditions $z(T)=x^1$ et $z'(T)=y^1$). Ce n'est pas la seule fonction qui convienne. En réalité il y en a une infinité d'où *l'existence d'une infinité de contrôles* ici et l'idée qu'un critère d'optimalité pourrait être défini.

1.2 Lien avec l'observabilité.

Comme on l'a annoncé en introduction, la méthode classique pour étudier l'observabilité est d'utiliser la notion duale de la contrôlabilité : l'observabilité. Pour la définir, on considère la matrice adjointe A^* de A i.e. la matrice qui satisfait $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$, pour tous les x,y de $\mathbb{R}^n$ et le système adjoint de (1) :

$$\left\{\begin{array}{l} -\varphi'(t)=A^*\varphi(t), t\in(0,T), \\ \varphi(T)=\varphi_T. \end{array}\right. \tag{6}$$

La donnée finale φ_T étant donnée, le système (6) admet l'unique solution définie par $\varphi(t)=e^{-A^*(t-T)}\varphi_T$. La fonction φ ainsi définie est analytique de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte est alors donnée par le Lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $x^0\in\mathbb{R}^n$. La solution de (1) avec condition initiale x^0 et fonction de contrôle $u\in L^2(0,T)$ satisfait à $x(T)=0$ si, et seulement si*

$$\int_0^T\langle u(t),B^*\varphi(t)\rangle dt+\langle x^0,\varphi(0)\rangle=0 \tag{7}$$

ceci, pour toute donnée finale φ_T, φ étant la solution du système adjoint (6).

Démonstration. Multiplions la première équation du système (1) par φ et la première équation du système (6) par x et additionnons les deux équations obtenues. On trouve :

$$\langle x'(t),\varphi(t)\rangle+\langle x(t),\varphi'(t)\rangle=\langle Ax(t),\varphi(t)\rangle+\langle Bu(t),\varphi(t)\rangle-\langle x(t),A^*\varphi(t)\rangle \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt}\langle x(t),\varphi(t)\rangle=\langle Bu(t),\varphi(t)\rangle.$$

On intègre pour obtenir

$$\langle x(T),\varphi_T\rangle-\langle x^0,\varphi(0)\rangle=\int_0^T\langle Bu(t),\varphi(t)\rangle=\int_0^T\langle u(t),B^*\varphi(t)\rangle dt.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 1. *En dimension finie, la contrôlabilité avec $x^1=0$ est équivalente à la contrôlabilité exacte. Autrement dit être capable de ramener le système à l'équilibre est équivalent au fait d'être capable de l'amener à n'importe quel autre état. La démonstration est fondée sur la linéarité et la réversibilité en temps du système (1). En effet, si $x^1\neq 0$, il suffit de résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t)=Ay(t), t\in(0,T), \\ y(T)=x^1, \end{array}\right.$$

et de définir le nouvel état z par $z=x-y$. Il est alors la solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} z'(t)=Az(t)+Bu(t), t\in(0,T), \\ z(0)=x^0-y(0), \end{array}\right.$$

et $x(T)=x^1$ équivaut à $z(T)=0$.
L'équivalence entre les deux types de contrôlabilité n'est plus forcément vérifiée pour un système nonlinéaire pas plus qu'elle ne l'est en dimension infinie si la réversibilité en temps n'est plus satisfaite (équation de la chaleur par exemple).

La condition (7) peut s'interpréter comme une condition d'optimalité pour une fonctionnelle quadratique.

Notation 1. *On notera J la fonctionnelle quadratique définie de $I\!R^n$ dans $I\!R$ par :*

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt + \langle x^0, \varphi(0)\rangle,$$

où φ est la solution du système adjoint (6) avec la condition $\varphi(T) = \varphi_T$.

Alors il découle du Lemme 1, le résultat suivant :

Lemme 2. *Si la fonctionnelle J introduite ci-dessus a un minimum local $\hat{\varphi_T} \in I\!R^n$ et si $\hat{\varphi}$ est la solution du système adjoint (6) avec $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi_T}$, alors*

$$u = B^*\hat{\varphi}$$

est un contrôle du système (1) avec donnée initiale x^0.

Démonstration. Si J atteint un minimum local en $\hat{\varphi_T}$ alors sa dérivée dans la direction de n'importe quel φ_T de $I\!R^n$ est nulle, si cette limite existe. C'est-à-dire :

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(\hat{\varphi_T} + h\varphi_T) - J(\hat{\varphi_T})}{h} = 0, \ \forall \ \varphi_T \in I\!R^n.$$

Par linéarité, l'unique solution du système

$$\begin{cases} -\psi'(t) = A^*\psi(t), t \in (0, T), \\ \psi(T) = \hat{\varphi_T} + h\varphi_T, \end{cases}$$

est $\psi = \hat{\varphi} + h\varphi$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{J(\hat{\varphi_T} + h\varphi_T) - J(\hat{\varphi_T})}{h} &= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\int_0^T |B^*\hat{\varphi}(t) + hB^*\varphi(t)|^2 dt + h\langle x^0, \varphi(0)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\hat{\varphi}(t)|^2 dt\right] \\ &= \frac{h}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt + \int_0^T \langle B^*\hat{\varphi}(t), B^*\varphi(t)\rangle dt + \langle x^0, \varphi(0)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, si J atteint un minimum local en $\hat{\varphi_T}$ alors, d'après le Lemme 1, $u = B^*\hat{\varphi}$ est un contrôle du système (1). ∎

Remarque 2. *Le Lemme 2 fournit une méthode variationnelle pour construire un contrôle. Comme il est de la forme $B^*\psi$, ce contrôle est une fonction analytique du temps t.*

Définition 2. *Le système (6) est* **observable** au temps $T > 0$ s'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt \geq c\,|\varphi(0)|^2, \tag{8}$$

pour tout $\varphi_T \in I\!R^n$, φ étant la solution du système adjoint (6).

Lemme 3. *L'inégalité d'observabilité (8) est équivalente à l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :*

$$\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt \geq c\,|\varphi_T|^2, \tag{9}$$

pour tout $\varphi_T \in I\!R^n$, φ étant la solution du système adjoint (6).

Démonstration. La solution du système (6) s'écrit : $\varphi(t) = e^{-A^*(t-T)}\varphi_T$ donc $\varphi(0) = e^{A^*T}\varphi_T$ et $\varphi(T) = e^{-A^*T}\varphi(0)$. L'opérateur qui, à chaque φ_T de $I\!R^n$, associe $\varphi(0)$ est donc un opérateur linéaire borné ainsi que son inverse. D'où l'équivalence entre (8) et (9). ∎

Remarquons que la démonstration de l'équivalence entre (8) et (9) repose sur un argument de dimension finie. Elle ne sera plus vraie en dimension infinie.

Proposition 1. *L'inégalité (8) est équivalente au théorème d'unicité suivant :*

$$B^*\varphi(t) = 0, \ \forall \ t \in [0, T] \Longrightarrow \varphi_T = 0. \tag{10}$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, (8) implique (9), qui, lui-même, implique (10). Pour démontrer l'autre implication, on introduit la semi-norme dans $I\!R^n$:

$$|\varphi_T|_* = \left[\int_0^T |B^*\varphi|^2 dt\right]^{1/2}.$$

Cette semi-norme définit une norme si, et seulement si, (10) est vraie. Or toutes les normes de $I\!R^n$ sont équivalentes. Donc (10) est équivalent à (9) qui, lui-même, implique (8). ■

On a ainsi réduit le problème de la contrôlabilité à l'étude d'une inégalité pour le système adjoint qui est homogène et au moins conceptuellement plus simple que le problème originel. Plus précisément :

Théorème 1. *Le système (1) est exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, le système (6) est observable au temps T.*

Démonstration. Deux étapes sont nécessaires :

Première étape : montrons que observabilité implique contrôlabilité. Grâce au Lemme 2, il suffit de démontrer que l'observabilité implique l'existence d'un minimum local pour la fonctionnelle J définie juste avant le Lemme 2. Comme J est continue (démonstration laissée au lecteur), il suffit de démontrer que sa limite à l'infini est infinie pour garantir l'existence d'un minimum.

En effet, si une fonctionnelle F de $I\!R^n$ dans $I\!R$ est continue et si elle satisfait : $\lim_{\|x\|\to+\infty}|F(x)| = +\infty$ alors on choisit $x_0 \in R^n$ tel que $F(x_0) \neq 0$ et, par définition de la limite :

$$\exists R > 0,\ \forall\, x \in I\!R^n, \|x\| > R \Longrightarrow |F(x)| > |F(x_0)|.$$

Ainsi, si F admet un minimum, il doit appartenir à la boule $\{x \in I\!R^n, \|x\| \leq R\}$. Or F est continue sur $I\!R^n$ donc en particulier sur cette boule compacte où elle atteint par conséquent un minimum.

L'observabilité implique que $J(\varphi_T) \geq \dfrac{c}{2}|\varphi_T|^2 - |\langle x^0, \varphi(0)\rangle|$. Comme $\varphi(0)$ dépend linéairement de φ_T, c'est le terme quadratique $|\varphi_T|^2$ qui donne la limite du membre de droite et $lim_{|\varphi_T|\to+\infty}|J(\varphi_T)| = +\infty$.

Deuxième étape : montrons que contrôlabilité implique observabilité. On suppose la contrôlabilité exacte au temps T. Si le système (6) n'est pas observable, c'est qu'il existe une suite $(\varphi_T^k)_{k\geq 1} \subset I\!R^n$ telle que $|\varphi_T^k| = 1$ pour tout $k \geq 1$ et

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T |B^*\varphi^k|^2 dt = 0. \tag{11}$$

Par compacité de la sphère unité, on peut extraire une sous-suite encore notée $(\varphi_T^k)_{k\geq 1}$ qui converge vers $\varphi_T \in I\!R^n$ avec $|\varphi_T| = 1$.
D'autre part, comme le système (1) est contrôlable, le Lemme 1 s'applique i.e. pour toute donnée initiale $x^0 \in I\!R^n$, il existe $u \in L^2(0,T)$ tel que

$$\int_0^T \langle u(t), B^*\varphi^k(t)\rangle dt + \langle x^0, \varphi^k(0)\rangle = 0,\ \forall\, k \geq 1. \tag{12}$$

De plus, si φ est la solution du système (6) avec $\varphi(T) = \varphi_T$, alors (12) implique $\langle x^0, \varphi(0)\rangle = 0,\ \forall\, x^0 \in I\!R^n$. En effet

$$|\langle x^0, \varphi^k(0)\rangle| \leq \int_0^T |u(t)| \cdot |B^*\varphi^k(t)| dt \leq \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |B^*\varphi^k(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

où le membre de droite tend vers 0 avec k d'après (11). Alors $\varphi(0) = 0$ et par conséquent $\varphi_T = 0$. Ceci contredit le fait que $|\varphi_T| = 1$. ■

1.3 Condition de contrôlabilité de Kalman.

On a maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème suivant dû à R. E. Kalman, qui donne une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices A et B pour que la contrôlabilité ait lieu, et ceci, pour tout temps T. On pressent déjà qu'en dimension infinie, les choses seront différentes. Si on considère l'équation des ondes par exemple, la vitesse de propagation des ondes étant finie, on ne peut pas espérer avoir contrôlabilité en un temps T trop petit puisque les ondes n'auront pas eu le temps de parcourir le domaine et de revenir (voir Paragraphe suivant).

Théorème 2. *Le système (1) est exactement contrôlable au temps T si, et seulement si*

$$rang[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{13}$$

Par conséquent, si le système (1) est exactement contrôlable au temps T, il l'est à n'importe quel temps.

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que la matrice $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ que l'on appellera matrice de contrôlabilité, est d'ordre $n \times (nm)$. Reprenons les deux exemples du paragraphe 1.1. On doit calculer le rang de la matrice $[B, AB]$ dans les deux cas. Dans l'exemple 1, c'est donc le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vaut 1 et $n = 2$ donc le système (1) avec les matrices A et B de l'exemple 1 n'est pas contrôlable comme on l'avait déjà vu.
La matrice $[B, AB]$ du deuxième exemple est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son rang est 2 donc le système (1) avec les matrices A et B de l'exemple 2 est contrôlable en tout temps T comme on l'avait déjà démontré.

Démonstration du Théorème de Kalman. Deux étapes sont nécessaires :

Première étape : montrons que la contrôlabilité exacte du système (1) implique que le rang de la matrice de contrôlabilité est n.
On raisonne par contraposition i.e. on suppose que le rang de cette matrice est strictement inférieur à n (puisqu'il vaut n au maximum). Dans ce cas, les lignes de la matrice de contrôlabilité sont linéairement dépendantes i.e. il existe une combinaison linéaire des lignes de la matrice qui est nulle sans que les coefficients de cette combinaison soient tous nuls. Ces coefficients forment les coordonnées d'un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ non nul satisfaisant

$$v^T\,[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = 0.$$

Comme $v^T\,[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = [v^T\,B, v^T\,AB, \ldots, v^T\,A^{n-1}B] = 0$, on a $v^T\,B = 0$, $v^T\,AB = 0, \ldots, v^T\,A^{n-1}B = 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur), il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telles que $A^n = c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I$ donc $v^T\,A^n B = 0$ également. En réalité, par récurrence, on démontre que $v^T\,A^k B = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$v^T\,e^{At}B = 0,\ \forall\, t > 0.$$

Ainsi, en utilisant la formule de solution donnée par la formule de variation de la constante (cf. (2)), on obtient

$$\langle v, x(T)\rangle = \langle v, e^{At}x^0\rangle + \int_0^T \langle v, e^{A(T-s)}Bu(s)\rangle ds = \langle v, e^{At}x^0\rangle.$$

Ceci signifie que, si on note $(n-k)$ le rang de la matrice de contrôlabilité, alors pour tout vecteur v non nul tel que $v^T\,[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = 0$, on a $\langle v, x(T) - e^{At}x^0\rangle = 0$. Autrement dit, $x(T)$ parcourt un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$ indépendamment de la fonction de contrôle u. Le système (1) n'est donc pas contrôlable.

Deuxième étape : montrons que si le rang de la matrice de contrôlabilité est n, alors le système (1) est exactement contrôlable.
Pour cela, d'après le Théorème 1, il suffit de démontrer que le système (6) est observable. D'après la Proposition 1, il est encore suffisant de démontrer (10).
On suppose donc que $B^*\varphi(t) = 0,\ \forall\, t \in [0,T]$. Comme $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)}\varphi_T$, on a $B^*e^{A^*(T-t)}\varphi_T = 0,\ \forall\, t \in [0,T]$. On calcule alors les dérivées successives de cette fonction du temps t et on les évalue en $t = T$ pour trouver

$$B^*[A^*]^k\varphi_T = 0,\ \forall\, k \geq 0.$$

Or, on a supposé que le rang de la matrice de contrôlabilité est n alors celui de son adjointe $[B^*, B^*A^*, \ldots, B^*(A^*)^{n-1}]$ vaut n également. Alors la dimension du noyau de la même matrice est 0 donc $\varphi_T = 0$. ∎

2 Présentation de la méthode HUM sur un problème modèle : contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec contrôle par Dirichlet.

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode HUM (pour Hilbert Uniqueness Method) développée par J. L. Lions dans son livre [4] sur un exemple. L'idée est de définir une semi-norme, qui est une norme lorsqu'un théorème **d'unicité** est vérifié. On construit alors un espace de **Hilbert** par complétion grâce à cette norme. D'où le nom de la méthode.

2.1 Problème et présentation des étapes de la méthode.

Le **problème de contrôle** que l'on a choisi d'étudier est le suivant : soit Ω un ouvert connexe non vide borné de $I\!R^n$ où $n \geq 1$. Son bord Γ est supposé régulier de classe C^2. On choisit $T > 0$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_0 \neq \varnothing$. On note $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

$$(P_C) \left\{ \begin{array}{l} y_{tt}(x,t) - \Delta_x y(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = y^0(x), y_t(x,0) = y^1(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ y(x,t) = v(x,t) \text{ pour } (x,t) \in \Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T) \text{ et } y(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \Sigma - \Sigma_0. \end{array} \right.$$

L'objectif est de ramener le système à l'équilibre en un temps fini T, ce qui s'écrit de la manière suivante : soient $T > 0$, y^0 et y^1 donnés dans un espace convenable (à déterminer), existe-t-il un contrôle v défini sur Σ_0 tel que la solution $y = y(v)$ du problème (P_C) satisfasse à $y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0$?

Comme on l'a déjà fait remarquer dans le paragraphe 1.3, ce système d'évolution est hyperbolique. La vitesse de propagation des ondes est finie (elle vaut 1 dans cet exemple) donc la contrôlabilité exige que le temps $T > 0$ soit suffisamment grand. En effet, si T est "trop petit", aucune action sur la frontière latérale Σ du système ne peut être perçue dans les points de Ω qui sont loin de Γ.

Etape 1. On commence par considérer le **problème homogène** (P_H) associé au problème de contrôle précédent (P_C) i.e. on se donne des conditions initiales $(\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ (où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Ω). Alors le problème homogène est :

$$(P_H) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{tt}(x,t) - \Delta_x \phi(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \\ \phi(x,0) = \phi^0(x), \phi_t(x,0) = \phi^1(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ \phi(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \Sigma. \end{array} \right.$$

On admet ici que ce problème admet une solution unique dont la régularité dépend de la régularité des conditions initiales ϕ^0 et ϕ^1 (cf. Lemme 3.3 de [4]).

Etape 2. On résout ensuite le **problème rétrograde** (P_R) associé au problème de contrôle (P_C) :

$$(P_R) \left\{ \begin{array}{l} \psi_{tt}(x,t) - \Delta_x \psi(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \\ \psi(x,T) = 0, \psi_t(x,T) = 0, \\ \psi(x,t) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) \text{ pour } (x,t) \in \Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T), \\ 0 \text{ pour } (x,t) \in \Sigma - \Sigma_0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où ν désigne le vecteur normal extérieur à Ω et "$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$" la dérivée dans cette direction, c'est-à-dire $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \nu_k$.

Le problème (P_R) est un problème aux limites non homogène à caractère rétrograde. Le système reste bien posé et admet donc une solution unique ψ. Le Théorème 4.2 du paragraphe 4.2 de [4] affirme que cette unique solution a la régularité suivante :

$$\psi \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T], H^{-1}(\Omega)).$$

On définit alors l'opérateur linéaire $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ qui, à (ϕ^0, ϕ^1) de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ associe

$$\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (\psi_t(\cdot, 0), -\psi(\cdot, 0)). \tag{14}$$

Etape 3 : construction d'un espace de Hilbert F par complétion.

De même que la solution du problème (P_H) pour des données initiales (ϕ^0, ϕ^1) est notée ϕ, on note ζ la solution du même problème (P_H) avec les données initiales (ζ^0, ζ^1).

Lemme 4. *Avec les notations ci-dessus et Σ_0 défini au début du paragraphe, on a, pour $(\phi^0, \phi^1, \zeta^0, \zeta^1)$ dans $(\mathcal{D}(\Omega))^4$*

$$\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\zeta^0, \zeta^1)\rangle = \int_\Omega [\psi_t(x,0)\ \zeta^0(x) - \psi(x,0)\ \zeta^1(x)]dx = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t)\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}(x,t) d\Sigma \tag{15}$$

et en particulier

$$\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1)\rangle = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t)\right|^2 d\Sigma \tag{16}$$

où $d\Sigma = d\Gamma dt$ désigne la mesure associée à la variété Σ, $d\Gamma$ étant celle qui correspond à Γ.

Démonstration. On multiplie la première équation du problème (P_H) par $\zeta(x,t)$ et on intègre sur $Q = \Omega \times (0,T)$ pour obtenir

$$0 = \int_\Omega \int_0^T (\psi_{tt}(x,t) - \Delta_x \psi(x,t))\zeta(x,t) dx dt = \int_\Omega \left(\int_0^T \psi_{tt}(x,t)\zeta(x,t)dt \right) dx - \int_0^T \left(\int_\Omega \Delta_x \psi(x,t)\zeta(x,t)dx \right) dt.$$

On calcule alors le premier terme par intégration par parties, en utilisant le fait que $\psi(\cdot, T) = \psi_t(\cdot, T) = 0$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^T \psi_{tt}(x,t)\zeta(x,t)dt &= -\psi_t(x,0)\zeta(x,0) - \int_0^T \psi_t(x,t)\zeta_t(x,t)dt \\
&= -\psi_t(x,0)\zeta^0(x) - \left(-\psi(x,0)\zeta_t(x,0) - \int_0^T \psi(x,t)\zeta_{tt}(x,t)dt \right) \\
&= -\psi_t(x,0)\zeta^0(x) + \psi(x,0)\zeta^1(x) + \int_0^T \psi(x,t) \cdot \Delta_x \zeta(x,t) dt
\end{aligned}$$

car ζ satisfait la première équation du problème (P_H). Quant au deuxième terme, on le calcule par la formule de Green, en utilisant le fait que ζ s'annule sur Σ (en tant que solution du problème homogène (P_H)) tandis que ψ s'exprime en fonction de ϕ sur Σ_0 et s'annule sur $\Sigma - \Sigma_0$ (en tant que solution du problème rétrograde (P_R)) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta_x \psi(x,t)\zeta(x,t)dx &= \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(x,t)\zeta(x,t)d\Sigma - \int_\Omega (\nabla_x \psi)(x,t)(\nabla_x \zeta)(x,t)dx \\
&= -\left(\int_\Sigma \psi(x,t)\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}(x,t)d\Sigma - \int_\Omega \psi(x,t)(\Delta_x \zeta)(x,t)dx \right) \\
&= -\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t)\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}(x,t)d\Sigma + \int_\Omega \psi(x,t)(\Delta_x \zeta)(x,t)dx
\end{aligned}$$

En regroupant les deux termes, on obtient le résultat annoncé (16). ∎

Comme l'indique le nom de la méthode, on souhaite construire un espace de Hilbert par complétion. En dimension finie, on a utilisé un théorème d'unicité pour définir une norme (cf. Proposition 1). On a le même type d'énoncé ici :

Théorème 3. *(Théorème d'unicité)*
Si ϕ est la solution du problème (P_H) pour un couple de données initiales (ϕ^0, ϕ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et si elle satisfait la condition

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \Sigma_0 \tag{17}$$

alors $\phi(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$.

Lemme 5. *(Lemme et définition)*
Si le Théorème d'unicité est vérifié, alors la semi-norme définie pour (ϕ^0, ϕ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_F := \left(\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma \right)^{1/2} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma_0)} \tag{18}$$

est une norme et on note F l'espace de Hilbert qui est le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour cette norme.

Notons que la valeur de ψ sur Σ_0 dans le problème rétrograde (P_R) a été choisie de sorte que l'on obtienne maintenant une norme. On a ainsi construit une structure adaptée à notre système.

Proposition 2.
Si le Théorème d'unicité est vérifié, l'opérateur linéaire Λ défini par (14) *se prolonge de manière unique en un isomorphisme de F sur son dual F'.*

Démonstration. Si on note $(\cdot,\cdot)_F$ le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_F$, il découle de (15)

$$|\langle \Lambda(\phi^0,\phi^1),(\zeta^0,\zeta^1)\rangle| = |((\phi^0,\phi^1),(\zeta^0,\zeta^1))_F| \le \|(\phi^0,\phi^1)\|_F \cdot \|(\zeta^0,\zeta^1)\|_F \tag{19}$$

ceci, pour (ϕ^0,ϕ^1) et (ζ^0,ζ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Remarquons que

$$H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega) \subset F \Longrightarrow F' \subset (H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))'$$

et $(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$. Par le théorème de densité-continuité, on déduit de (19) que l'on peut prolonger Λ en un opérateur linéaire continu de F dans F'.

On applique le théorème de représentation de Riesz : à tout élément (f,g) de $F' = L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, est associé un élément unique (ϕ^0,ϕ^1) de F tel que, pour tout (ζ^0,ζ^1) de F

$$\langle (f,g),(\zeta^0,\zeta^1)\rangle = ((\phi^0,\phi^1),(\zeta^0,\zeta^1))_F,$$

alors par définition, $\Lambda(\phi^0,\phi^1) = (f,g)$. Ainsi Λ est bijective continue de F dans F'. Le théorème des isomorphismes de Banach permet de conclure que Λ est un isomorphisme de F dans F'. ■

Etape 4 : conclusion.

Comme Λ est un isomorphisme de F dans F', l'équation

$$\Lambda(\phi^0,\phi^1) = (y^1,-y^0)$$

a une solution unique (ϕ^0,ϕ^1) dans F pour tout couple de données (y^0,y^1) tel que $(y^1,-y^0)\in F'$.
On déduit de toute cette étude le résultat suivant.

Théorème 4. *(Théorème de contrôlabilité "abstrait")*
Soit $T>0$ tel que le théorème d'unicité (Théorème 3) soit vérifié. On peut alors définir l'espace F complété de $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (18). *Alors, pour tout couple de données initiales (y^0,y^1) tel que $(y^1,-y^0)\in F'$, il existe un contrôle $v\in L^2(\Sigma_0)$ tel que la solution y du problème (P_C) satisfait à $y(\cdot,T) = y_t(\cdot,T) = 0$.*

Démonstration. Soit (y^0,y^1) tel que $(y^1,-y^0)\in F'$, alors on choisit comme condition initiale du problème (P_H) le couple (ϕ^0,ϕ^1) de F qui est la solution unique de $\Lambda(\phi^0,\phi^1) = (y^1,-y^0)$. Le problème (P_H) admet une solution unique ϕ et on choisit ce ϕ pour écrire le problème rétrograde (P_R). On a alors une unique solution ψ au problème (P_R). On choisit enfin $v = \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Alors, comme, par définition de Λ, on a (cf. (14))

$$\Lambda(\phi^0,\phi^1) = (\psi_t(\cdot,0), -\psi(\cdot,0)),$$

cela signifie que $y^0 = \psi(\cdot,0)$ et $y^1 = \psi_t(\cdot,0)$. Autrement dit, ψ est solution du problème (P_C). Or le problème (P_C) admet une unique solution (voir le Théorème 4.2 de [4]). Donc $y=\psi$ et on a, en particulier, $y(\cdot,T) = y_t(\cdot,T) = 0$. Notons que v a bien la régularité souhaitée puisque

$$(\phi^0,\phi^1)\in F \iff \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\in L^2(\Sigma_0).$$

Ceci achève la démonstration. ■

Remarquons que la résolution de l'équation $\Lambda(\phi^0,\phi^1) = (y^1,-y^0)$ équivaut à la recherche d'un couple $(\phi^0,\phi^1)\in F$ pour lequel la fonctionnelle suivante atteint un minimum :

$$\frac{1}{2}\langle \Lambda(\phi^0,\phi^1),(\phi^0,\phi^1)\rangle - (y^1,\phi^0) + (y^0,\phi^1) = \int_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x,t)\right|^2 d\Sigma - \langle (y^1,-y^0),(\phi^0,\phi^1)\rangle.$$

On retrouve, comme en dimension finie, une méthode variationnelle de construction du contrôle (cf. Lemme 2).

Le Théorème 4 a un caractère abstrait puisque les espaces de Hilbert F et F' ne sont pas clairement identifiés à ce stade.

2.2 Détermination explicite de la contrôlabilité.

L'idée maintenant est d'aboutir à un théorème de contrôlabilité exacte avec la précision des espaces F et F'. On définit, comme en dimension finie, la notion d'observabilité.

Définition 3. *(Observabilité)*
Le problème homogène (P_H) *est* **observable** au temps $T > 0$ s'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$C_1 \cdot \|(\phi^0, \phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) \right|^2 d\sigma dt. \tag{20}$$

Notons que, lorsque cette inégalité d'observabilité est satisfaite, la connaissance de la quantité dite observée (l'intégrale qui ne dépend que de la trace de la dérivée normale sur $(0,T)\times\Gamma_0$) détermine de manière unique la solution du problème homogène (P_H).

Définition 4. *(Admissibilité)*
Le problème homogène (P_H) *est* **admissible** au temps $T > 0$ s'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) \right|^2 d\sigma dt \leq C_2 \cdot \|(\phi^0, \phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{21}$$

Remarquons que, lorsque cette inégalité est satisfaite, la dérivée normale de ϕ est dans $L^2(\Sigma_0)$. On a alors le théorème de contrôlabilité plus précis :

Théorème 5. *(Théorème de contrôlabilité)*
Soit $T > 0$ tel que le problème (P_H) soit à la fois observable et admissible au temps T alors pour tout couple de données initiales $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(\Sigma_0)$ tel que la solution y du problème (P_C) satisfait à $y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0$.

Démonstration. Tout d'abord l'observabilité implique que le Théorème d'unicité (Théorème 3) est vérifié. En effet, si ϕ est la solution du problème (P_H) et si $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) = 0$, $\forall\ (x,t) \in \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$, alors (20) implique $\|(\phi^0, \phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = 0$. Il en découle que $\phi^0 = \phi^1 = 0$ et par unicité de la solution de (P_H), ϕ est identiquement nul dans $Q = \Omega \times (0,T)$.
Le Théorème 4 est applicable et il ne reste qu'à décrire l'espace F pour achever cette démonstration.
Le problème (P_H) est admissible et observable si, et seulement si, $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (par double inclusion, chacune des deux propriétés donnant l'une des deux inclusions). Enfin le dual de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. ■

2.3 Théorèmes d'Ingham et analyse spectrale.

Plusieurs méthodes permettent d'établir l'admissibilité et l'observabilité. On aurait pu utiliser la méthode des multiplicateurs (cf. [3] ou [4]). On a choisi pour cet exposé d'introduire des résultats anciens dus à Ingham (cf. [2]). C'est en effet cette méthode qui a été utilisée par D. Mercier et l'auteur pour l'application présentée dans le paragraphe suivant. L'idée est de généraliser l'identité de Parseval pour les suites de fonctions orthogonales.

Théorème 6. *(Ingham [2]) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombre réels et soit $\gamma > 0$ tel que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Pour tout T tel que $T > \pi/\gamma$, il existe une constante $K_1 = K_1(T, \gamma)$ tel que, pour toute suite finie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$K_1 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt. \tag{23}$$

Démonstration. *Première étape.*
On commence par un changement d'échelle. Le changement de variable $t = (T/\pi)s$ donne :

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{T\lambda_n}{\pi}s} \right|^2 ds.$$

On pose $\mu_n = \dfrac{T\lambda_n}{\pi}$. Alors, par hypothèse, $\mu_{n+1} - \mu_n = T(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/\pi \geq T\gamma/\pi > 1$. On notera $\gamma_1 := T\gamma/\pi$.

Deuxième étape. On introduit la fonction

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto h(t) = \begin{cases} \cos(t/2) & \text{si } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{si } |t| > \pi. \end{cases}$$

Cette fonction a été choisie de sorte que sa transformée de Fourier $K(\varphi)$ se comporte en $1/\varphi^2$ à l'infini. En effet, en utilisant les formules de Moivre, on trouve après calculs

$$K(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{it\varphi}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{it\varphi}dt = \frac{4\cos(\pi\varphi)}{1-4\varphi^2}.$$

Troisième étape. On introduit h dans l'intégrale que l'on veut estimer, en utilisant le fait que $0 \leq h(t) \leq 1$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_n a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds \geq \int_{-\pi}^{\pi} h(s) \cdot \left|\sum_n a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} h(s) \cdot \left(\sum_n a_n e^{i\mu_n s}\right) \cdot \left(\sum_m \overline{a_m} e^{-i\mu_m s}\right) ds = \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{i(\mu_n - \mu_m)s} = \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\
&= K(0) \cdot \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n \neq m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \geq 4 \sum_n |a_n|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} (|a_n|^2 + |a_m|^2) |K(\mu_n - \mu_m)| \\
&= 4 \sum_n |a_n|^2 - \sum_n |a_n|^2 \left(\sum_{m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)|\right).
\end{aligned}$$

Les arguments utilisés ci-dessus sont : le fait que $\mu_n = \mu_m$ si, et seulement si $n = m$ (puisque $\mu_{n+1} - \mu_n > 1$), l'inégalité classique $|a_n\overline{a_m} + a_m\overline{a_n}| \leq |a_n|^2 + |a_m|^2$ (que l'on démontre en calculant $0 \leq |a_n + a_m|^2 = (a_n + a_m)(\overline{a_n} + \overline{a_m})$ ainsi que $|a_n - a_m|^2$ de la même manière) et enfin la parité de K (i.e. $K(\varphi) = K(-\varphi),\ \forall\ \varphi \in \mathbb{R}$).
Pour conclure, il reste à estimer la somme $\sum_{m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)|$ sachant que $\mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma_1 > 1$ et donc $|\mu_n - \mu_m| \geq \gamma_1 |n - m| > 1,\ \forall\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On a alors

$$\sum_{m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)| \leq \sum_{m \neq n} \frac{4}{4|\mu_n - \mu_m|^2 - 1} \leq \sum_{m \neq n} \frac{4}{4\gamma_1^2 |n - m|^2 - 1} = 8 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4\gamma_1^2 r^2 - 1}.$$

Comme $\gamma_1 > 1$, $4\gamma_1^2 r^2 - 1 > 4\gamma_1^2 r^2 - \gamma_1^2 = \gamma_1^2(4r^2 - 1)$. De plus

$$\sum_{r \geq 1} \frac{1}{4r^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{2r - 1} - \frac{1}{2r + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'où $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_n a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds \geq \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2}\right) \sum_n |a_n|^2$. ■

L'autre inégalité est, elle, valable sans conditions sur T. C'est le théorème suivant.

Théorème 7. *(Ingham [2]) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombre réels et soit $\gamma > 0$ tel que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

Pour tout $T > 0$, il existe une constante $K_2 = K_2(T, \gamma)$ tel que, pour toute suite finie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\int_{-T}^{T} \left|\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \leq K_2 \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \tag{25}$$

Démonstration. La démonstration, qui utilise le même type d'arguments que la précédente, est laissée au lecteur (voir le livre [7]). ■

Notons que l'on peut généraliser les deux théorèmes au cas où l'intervalle d'intégration en temps est J au lieu de $(-T, T)$. Dans ce cas, la condition sur T dans le premier théorème devient $|J| > 2\pi/\gamma$ où $|J|$ désigne l'amplitude de l'intervalle J.
On peut également généraliser les deux résultats au cas où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $l^2(\mathbb{R})$ (cf. [1] pour la démonstration). On obtient ainsi le Lemme suivant.

Lemme 6. *(Haraux [1])*
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels telle qu'il existe un triplet $(\alpha,\beta,N_0)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$ satisfaisant

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq\alpha>0,\forall|n|\geq N_0 \tag{26}$$

et $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq\beta>0$.
Considérons également J un intervalle d'amplitude $|J|>2\pi/\alpha$. Alors il existe deux constantes $\kappa_1(J)$ et $\kappa_2(J)$ qui ne dépendent que de α, β et N_0 telles que

$$\kappa_1(J)\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\leq\int_J\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{i\lambda_nt}\right|^2dt\leq\kappa_2(J)\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2$$

pour toute suite $(a_n)\in l^2(\mathbb{R})$.

On reprend maintenant le problème de contrôle (P_C) que l'on a étudié dans le paragraphe 2.1 mais pour simplifier, on le réécrit en dimension 1 en faisant le choix $\Omega=(0;1)$ et $\Gamma_0=\{1\}$:

$$(P_C^1)\begin{cases} y_{tt}(x,t)-y_{xx}(x,t)=0 \text{ pour } (x,t)\in(0;1)\times(0,T),\\ y(x,0)=y^0(x),y_t(x,0)=y^1(x) \text{ pour } x\in(0;1),\\ y(1,t)=f(t),\ \forall\ t\in(0,T),\end{cases}$$

et

$$(P_H^1)\begin{cases} \phi_{tt}(x,t)-\phi_{xx}(x,t)=0 \text{ pour } (x,t)\in(0;1)\times(0,T),\\ \phi(x,0)=\phi^0(x),\phi_t(x,0)=\phi^1(x) \text{ pour } x\in(0;1),\\ \phi(0,t)=\phi(1,t)=0,\ \forall\ t\in(0,T).\end{cases}$$

Pour appliquer le Théorème 5, il suffit de démontrer qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_1\cdot\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq\int_0^T|\phi_x(1,t)|^2dt\leq C_2\cdot\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{27}$$

L'étude spectrale de l'opérateur A défini comme suit va permettre d'utiliser les deux Théorèmes d'Ingham pour déduire (27). On commence par réécrire le problème homogène (P_H^1) en utilisant l'argument classique de réduction d'ordre i.e. on pose $z(x,t)=\phi_t(x,t)$ et $\Phi(t)=(\phi(\cdot,t),z(\cdot,t))$ alors la formulation abstraite de (P_H^1) est :

$$(P_{abs})\begin{cases}\Phi_t(t)+A\Phi(t)=0,\ \forall\ t\in(0,T),\\ \Phi(0)=\Phi^0,\end{cases}$$

où Φ appartient au domaine de l'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} D(A)=H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)\quad&\to L^2(0;1)\times H^{-1}(0;1)\\ \Phi=(\phi,z)\quad&\mapsto A\Phi=(-z,-\partial_x^2\phi)=\begin{pmatrix}0&-1\\-\partial_x^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'opérateur de Laplace $-\partial_x^2$ est un opérateur non borné défini de $H_0^1(0;1)$ dans $H^{-1}(0;1)$ comme suit :

$$\begin{aligned} -\partial_x^2: H_0^1(0;1)\subset H^{-1}(0;1)\to H^{-1}(0;1)&\\ \phi\mapsto-\partial_x^2\phi:\psi\mapsto\langle-\partial_x^2\phi,\psi\rangle_{H^{-1}(0;1),H_0^1(0;1)}=\textstyle\int_0^1\phi_x\psi_xdx,\ \forall\ \phi,\psi\in H_0^1(0;1).&\end{aligned}$$

Lemme 7. *(étude spectrale de l'opérateur A)*
Les valeurs propres de l'opérateur A défini ci-dessus sont : $\mu_n=in\pi,n\in\mathbb{Z}^*$. Les fonctions propres associées sont

$$\Phi^n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\mu_n}\\-1\end{pmatrix}\sin(n\pi x),n\in\mathbb{Z}^*.$$

Elles forment une base orthonormée de $H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)$.

Démonstration. Un vecteur $\Phi = (\phi, z) \neq (0,0)$ de $H_0^1(0;1) \times L^2(0;1)$ est une fonction propre de A associée à la valeur propre μ si, et seulement si $A\Phi = \mu\Phi$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} -z = \mu\phi, \\ \partial_x^2\phi = \mu z. \end{cases}$$

Nous cherchons donc une fonction ϕ de régularité $C^2([0;1])$ qui s'annule en 0 et en 1 et qui est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants $\partial_x^2\phi = \mu^2\phi$ ($\phi \neq 0$). Une telle fonction est de la forme $\phi(x) = be^{\mu x} + ce^{-\mu x}$ où b et c sont déterminés de sorte que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Ainsi $\phi(x) = b(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) = 2b\sinh(\mu x)$ et comme $\sinh(\mu) = 0$, il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\mu/i = n\pi$. D'où les expressions pour les valeurs et fonctions propres. Remarquons que les fonctions propres sont définies à une constante multiplicative près et que le choix a été fait ici pour qu'elles soient de norme 1 au sens de la norme issue du produit scalaire :

$$(u,v)_{H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)} = \int_0^1 u_x(x)\cdot\overline{v}_x(x)dx + \int_0^1 u(x)\overline{v}(x)dx.$$

Un calcul permet de vérifier que $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est une suite orthonormale de $H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)$. C'est donc en particulier une famille libre dans cet espace.

De plus, on démontre que l'opérateur de Laplace $(-\partial_x^2)$ est un isomorphisme de $H_0^1(0;1)$ sur $H^{-1}(0;1)$ (ce résultat classique repose sur l'écriture variationnelle du problème $-\partial_x^2 u = f$ avec $u \in H_0^1(0;1)$ et l'utilisation de Lax-Milgram et du théorème des isomorphismes de Banach). Alors l'opérateur A réalise un isomorphisme de $H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)$ sur $L^2(0;1)\times H^{-1}(0;1)$. Son inverse A^{-1} est compact grâce à la compacité de l'inverse du laplacien (celle-ci repose sur le théorème de Rellich-Kondrachov qui dit que l'injection de $H_0^1(0;1)$ dans $L^2(0;1)$ est compacte).
On démontre également que l'opérateur A est anti-adjoint (i.e. que (iA) est autoadjoint). Il en est de même de son inverse A^{-1}.
Alors les fonctions propres de l'opérateur anti-adjoint compact A^{-1} forment une base hilbertienne de $H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)$. Ces fonctions propres ne sont autres que les Φ^n. ∎

Théorème 8. *(contrôlabilité pour le problème en dimension 1 : (P_C^1))*
Soit $T > 2$. Pour tout couple de données initiales $(y^0, y^1) \in L^2(0;1)\times H^{-1}(0;1)$, il existe un contrôle $f \in L^2(0,T)$ tel que la solution y du problème (P_C^1) satisfait à $y(\cdot,T) = y_t(\cdot,T) = 0$.

Démonstration. L'étude spectrale permet d'écrire la solution du problème abstrait (P_{abs}) sous la forme $\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n e^{\mu_n t}\Phi^n$ où $\Phi^0 = \Phi(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n\Phi^n = (\phi^0, \phi^1)$ appartient à $H_0^1(0;1)\times L^2(0;1)$ (i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|a_n|^2 < \infty$). Ainsi (P_H^1) admet une solution unique $\phi(\cdot,t) \in H_0^1(0;1)$ définie par

$$\phi(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n e^{in\pi t}\frac{1}{in\pi}\sin(n\pi x).$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^T |\phi_x(1,t)|^2 dt = \int_0^T \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}(-1)^n a_n e^{in\pi t}\right|^2 dt$. On applique le Lemme 6 avec $\lambda_n = n\pi$ donc $\alpha = \pi$, $J = (0,T)$ d'amplitude $T > 2 = 2\pi/\alpha$. Le problème (P_H^1) est donc à la fois admissible et observable pour $T > 2$. Il reste à appliquer le Théorème 5 pour conclure. ∎

Notons que l'exemple choisi ici est "simple" et que le Lemme d'Ingham généralisé par A. Haraux n'est pas nécessaire (cf. [7] pour une démonstration directe reposant sur l'orthogonalité des $e^{in\pi t}$ dans $L^2(0;1)$). On a introduit ces lemmes d'Ingham essentiellement pour le paragraphe suivant où ils ont toute leur utilité.

3 Un exemple d'application : contrôlabilité d'une chaîne de poutres d'Euler-Bernoulli connectées en séries avec points-masses.

Dans ce paragraphe, l'idée est de présenter dans les grandes lignes l'article de D. Mercier et l'auteur : "Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses", publié dans Collectanea Mathematica en 2009 (cf. [5] pour la référence exacte).

Dans un papier de 2000, C. Castro et E. Zuazua étudient la contrôlabilité exacte d'un système de deux poutres connectées avec une masse au noeud intérieur (cf. [6]). L'objectif de [5] est de généraliser cette étude au cas d'une chaîne de N poutres connectées en série avec des points-masses, ceci en utilisant la méthode HUM de Lions présentée précédemment et les théorèmes d'Ingham et Haraux pour établir l'encadrement suffisant pour avoir contrôlabilité. Le raisonnement se fait en plusieurs étapes :

1. Chaque poutre est l'arête d'un graphe (en fait un arbre) et chaque point-masse est un sommet du même graphe. On note l_j la longueur de la $j^{ième}$ poutre ($1 \leq j \leq N$), E_i le $i^{ième}$ noeud intérieur sur lequel est posée la masse M_i ($1 \leq i \leq N-1$), E_N et E_{N+1} les noeuds extérieurs.

   On définit alors le cadre abstrait à l'aide d'un opérateur $\mathcal{A}$ de domaine $D(\mathcal{A})$ inclus dans $H := \prod_{j=1}^{N} L^2((0,l_j)) \times \mathbb{R}^{N-1}$ puisque deux fonctions scalaires décrivent le problème : $u_j(x,t)$ et $z_i(t)$, qui contiennent respectivement l'information sur le déplacement vertical des poutres ($1 \leq j \leq N$) et des points-masses ($1 \leq i \leq N-1$).

2. On écrit les inégalités d'observabilité/admissibilité suffisantes pour avoir la contrôlabilité en supposant que l'on contrôle en un seul point-masse extérieur (E_N, plus précisément la dérivée normale seconde de u_1 en E_N est une fonction du temps égale à la fonction de contrôle q). On cherche s'il existe des constantes positives κ_1 et κ_2 telles que :

$$\kappa_1 \cdot \|(U^0,U^1)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_0^T \left| a_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1}(E_N,t) \right|^2 dt \leq \kappa_2 \cdot \|(U^0,U^1)\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{28}$$

   où l'on a considéré que la poutre indexée par $i=1$ est celle qui relie E_N à E_1 et $\mathcal{H}$ est une classe de conditions initiales $U^0 = (u(\cdot,0), z(\cdot,0))$, $U^1 = (u_t(\cdot,0), z_t(\cdot,0))$ que l'on cherche à déterminer. Les a_j sont des constantes mécaniques qui interviennent dans l'équation d'Euler-Bernoulli ainsi que dans les conditions de transmission.

3. On utilise alors une version adaptée des théorèmes d'Ingham et Haraux (Théorèmes 2.3 et 7, Lemme 6). Pour cela il nous faut étudier le comportement asymptotique de l'écart entre deux valeurs propres successives et établir l'encadrement suivant :

$$K_1 \cdot \|\phi\|_H^2 \cdot \lambda \leq |\phi_1'(0)|^2 \leq K_2 \cdot \|\phi\|_H^2 \cdot \lambda \tag{29}$$

   où la norme $\|\cdot\|_H$ est définie par

$$\|(u,z)\|_H^2 = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} u_j^2(x_j)dx_j + \sum_{i=1}^{N-1} M_i z_i^2$$

   et ϕ est la fonction propre de l'opérateur $\mathcal{A}$ associée à la valeur propre λ tandis que ϕ_1 est la restriction de cette même fonction à la première poutre.

Remarquons que l'encadrement supplémentaire (29) n'était pas utile pour l'exemple de la contrôlabilité de l'équation des ondes par Dirichlet en dimension 1 ((P_C^1), paragraphe 2.3). En réalité, dans ce cas, la dérivée de la fonction propre calculée en $x=1$ (point où s'exerce le contrôle) vaut $(-1)^n$ et sa valeur absolue est 1. Ici, les choses sont plus complexes et on a besoin de gérer la manière dont $|\phi_1'(0)|^2$ dépend de la valeur propre λ.

La difficulté majeure est que l'on n'a pas l'expression explicite des valeurs propres et fonctions propres mais seulement celle de l'équation caractéristique. L'utilisation de la méthode des matrices extérieures due à Paulsen est alors un outil technique indispensable. En effet, l'idée est de dire que la restriction d'une fonction propre ϕ à la $j^{ième}$ poutre est entièrement déterminée par la donnée du vecteur

$$V_j(x) = \left(\phi_j(x),\, \phi_{jx_j^{(2)}}(x),\, \phi_{jx_j^{(1)}}(x),\, \phi_{jx_j^{(3)}}(x)\right)^t,\ \forall x \in [0,l_j].$$

Un calcul montre que

$$\begin{cases} V_j(l_j) = A_j V_j(0),\ \forall j \in \{1,...,N\} \\ V_{j+1}(0) = T_j V_j(l_j),\ \forall j \in \{1,...,N-1\} \\ V_N(l_N) = M(\lambda) V_1(0) \end{cases}$$

où A_j, T_j sont des matrices carrées d'ordre 4 qui traduisent l'équation d'Euler-Bernoulli sur la $j^{ième}$ poutre et les conditions de transmission entre la $j^{ième}$ et la $(j+1)^{ième}$ poutre respectivement et

$$M(\lambda) = A_N T_{N-1} A_{N-1} ... A_2 T_1 A_1. \tag{30}$$

On démontre alors que $\lambda^2 > 0$ est une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{A}$ si, et seulement si λ satisfait l'équation caractéristique

$$f(\sqrt{\lambda}) = \det(M_{12}(\lambda)) = 0,$$

où $M_{12}(\lambda)$ est la matrice carrée d'ordre 2 qui est la restriction de la matrice $M(\lambda)$, donnée par (30), à ses deux premières lignes et deux dernières colonnes.
L'utilisation des matrices extérieures permet de mieux gérer le calcul des termes prépondérants de l'équation caractéristique (on s'intéresse en effet au comportement asymptotique de l'écart entre deux racines de cette équation). Ainsi, les déterminants sont en un sens calculés avant la multiplication des matrices, ce qui évite l'annulation des termes prépondérants.

Au final, on obtient la contrôlabilité et l'espace $\mathcal{H}$ est $D(\mathcal{A}^{1/4}) \times D(\mathcal{A}^{-1/4})$.

References

[1] A. Haraux. *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire.* J. Maths Pures et Appl., **68**, p. 457-465, 1989.

[2] A. E. Ingham. *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Math. Z. **41**(1936), 367-369.

[3] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* RAM: Research in Applied Mathematics, Masson, Paris, 1994.

[4] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Vol. 1 et 2, Masson, RMA, Paris, 1988.

[5] D. Mercier, V. Régnier. *Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses,* Collect. Math. **60/3** (2009), 307-334.

[6] C. Castro, E. Zuazua. *Exact boundary controllability of two Euler-Bernoulli beams connected by a point mass.* Mathematical and Computer Modelling. **32** (2000), 955-969.

[7] S. Micu, E. Zuazua. *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations.* Dans "Quelques questions de théorie du contrôle". Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann (2004), 69-157.

[8] E. Zuazua. *Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some results and open problems.* Dans "Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations", vol 3, C. M. Dafermos and E. Feireisl eds., Elsevier Science (2006), 527-621.