



**HAL**  
open science

# Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires incertains

Rabiâ Benayache

► **To cite this version:**

Rabiâ Benayache. Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires incertains : application à un système hydraulique. Automatique. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrais, 2009. Français. NNT : 2009VALE0029 . tel-03064452

**HAL Id: tel-03064452**

**<https://uphf.hal.science/tel-03064452>**

Submitted on 14 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2009 VALE 0029



NUMERO D'ORDRE : 09/40

# Thèse

Présentée pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis**

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Par : **M. Rabiâ BENAYACHE**

**Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires  
incertains : application à un système hydraulique**

Soutenue publiquement le 02 décembre 2009 devant la commission d'examen composée de

<i>Rapporteurs :</i>	R. OUTBIB	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille (U3)
	M. ZASADZINSKI	Professeur à l'Université d'Henri Poincaré, Nancy I
<i>Examineurs :</i>	J.M. CASTELAIN	Professeur à Université de Valenciennes (UVHC)
	P. BUSSY	Professeur à Université de Picardie Jules Verne
	L. CHRIFI-ALAOUI	Maitre de conférence à l'Université de Picardie Jules Verne
<i>Invité :</i>	A.BECHAIB	Ingénieur de recherche et développement, Areva

---

Laboratoire des Technologies Innovantes (L.T.I)

13 Av F. Mitterrand. 02880 Cuffies



## Remerciements



# Liste des tableaux

1.1	Différentes stratégies de commande . . . . .	35
1.2	Paramètres de la maquette à trois cuves . . . . .	56
2.1	Différentes structures du système modélisé ( $\tilde{s}$ ) . . . . .	82
D.1	Principales caractéristiques de la carte dspace ds1102 . . . . .	187



# Table des figures

1.1	Trajectoire d'état dans le plan de phase. . . . .	29
1.2	Mode de glissement au sens de Filippov. . . . .	30
1.3	Attractivité de la surface . . . . .	32
1.4	Phénomène de réticence . . . . .	40
1.5	Fonction de saturation et couche limite autour de la droite de glissement	41
1.6	Fonction de saturation <i>Sat</i> . . . . .	42
1.7	Fonction d'adoucissement <i>Com sin</i> . . . . .	42
1.8	Fonction d'adoucissement <i>Cont(s)</i> . . . . .	42
1.9	Fonction d'adoucissement <i>Com arc</i> . . . . .	43
1.10	Les différentes fonctions d'adoucissement . . . . .	43
1.11	La loi de commande par mode de glissement avec la fonction <i>Sign.</i> . . . .	53
1.12	La loi de commande par mode de glissement avec la fonction <i>Sat.</i> . . . .	53
1.13	Erreurs statiques pour différentes stratégies de commande . . . . .	54
1.14	Système réel . . . . .	55
1.15	Système constitué de trois cuves contenant de l'eau et reliées par deux canaux . . . . .	57
1.16	Différentes entrées du système en boucle ouverte . . . . .	60
1.17	Réponse du système pour différents débits volumétriques d'entrée . . . .	60
1.18	Caractéristique du coefficient de section en fonction de la position de la vanne . . . . .	61
1.19	Sortie du système en fonction des différents débits volumétriques d'entrée pour différentes positions de la vanne . . . . .	61
1.20	Différents débits volumétriques d'entrée du système en boucle ouverte . .	61
1.21	Sortie du système pour pour différents débits volumétriques d'entrée . . .	62

1.22	Paramètres du système . . . . .	62
1.23	Résultats expérimentaux obtenus avec la CMG classique . . . . .	65
1.24	Résultats expérimentaux obtenus avec la CMG classique en présence de perturbations mal adaptées . . . . .	66
1.25	Résultats expérimentaux obtenus avec la CMGS en présence de perturbations mal adaptées . . . . .	67
1.26	Résultats expérimentaux obtenus avec la CMGCLV . . . . .	68
1.27	Résultats expérimentaux obtenus avec la Commande par mode de glissement avec action Intégrale (CMGI) . . . . .	70
1.28	Sortie du système en utilisant les trois commandes CMG, CMGS et CMGI	71
2.1	Ensemble de glissement d'ordre deux . . . . .	80
2.2	Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de twisting . . . . .	83
2.3	Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de super twisting . . . . .	85
2.4	Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de convergence prédefinie	88
2.5	Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme sous-optimal . . . . .	89
2.6	Schéma de principe du différentiateur robuste . . . . .	90
2.7	Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste . . . . .	93
2.8	Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste- système perturbé . . . . .	94
2.9	Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste- système perturbé . . . . .	95
2.10	Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de super twisting	97
2.11	Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de super twisting en présence de variations paramétriques et des perturbations extérieurs	98
3.1	Schéma bloc du système (3.4). . . . .	103
3.2	Principe de la technique du backstepping. . . . .	104
3.3	Backstepping adaptatif pour un système avec des paramètres incertains et sans perturbations extérieures. . . . .	122

3.4	Backstepping adaptatif pour un système avec des paramètres incertains et des perturbations extérieures. . . . .	123
3.5	Résultats expérimentaux avec la CBC sans perturbations extérieures ni paramètres incertains . . . . .	131
3.6	Résultats expérimentaux avec la CBC sans perturbations extérieures ni paramètres incertains . . . . .	132
3.7	Résultats avec la CBC en présence de paramètres incertains $a_{z1} = 0.5\hat{a}_{z1}$ et des perturbations extérieures $q_{ext} = 0.5.10^{-4}(m^3/s)$ . . . . .	133
3.8	Résultats avec la CBA en présence de paramètres incertains $a_{z1} = 0.5\hat{a}_{z1}$ et des perturbations extérieures $q_{ext} = 0.5.10^{-4}(m^3/s)$ . . . . .	134
4.1	Commande par backstepping mode glissant . . . . .	152
4.2	Sortie du système en utilisant les deux méthodes . . . . .	154
4.3	Entrée du système en utilisant les deux méthodes . . . . .	154
4.4	Les paramètres estimés en utilisant la CBAMG . . . . .	155
4.5	Sortie du système en présence de perturbations . . . . .	156
4.6	Entrée du système en présence de perturbations . . . . .	156
4.7	Paramètres estimés du système perturbé . . . . .	157
4.8	Stabilisation du niveau d'eau dans le reservoir 2 en utilisant la CMG et la CBMGOD. . . . .	161
4.9	La commande de la pompe 1 en utilisant la CMG et la CBMGOD. . . . .	161
4.10	La surface de glissement $s$ . . . . .	162
4.11	Les erreurs de niveau d'eau en utilisant les deux méthodes de commande	162
4.12	Stabilisation du niveau d'eau $h_3$ en présence de fuite dans la colonne 2. .	163
4.13	Zoom sur le niveau d'eau $h_3$ . . . . .	163
4.14	Entrée du système en présence de perturbations . . . . .	163
4.15	Surfaces de glissement . . . . .	164
4.16	Erreurs de suivi . . . . .	164
C.1	Système hydraulique formé de deux bacs remplis d'eau reliés par un canal	185



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>19</b>
0.1 Contexte du travail . . . . .	19
0.2 Travaux effectués . . . . .	20
0.3 Objectifs de la thèse . . . . .	22
0.4 Plan du mémoire . . . . .	25
<b>1 Modélisation et Commande par modes glissants</b>	<b>27</b>
Introduction . . . . .	27
1.1 Les systèmes à structure variable en mode glissant . . . . .	28
1.1.1 Approche de Filippov . . . . .	29
1.1.2 Approche de la commande équivalente . . . . .	32
1.1.3 Conception de la commande . . . . .	34
1.1.4 Etude de robustesse . . . . .	35
1.1.4.1 Modèle avec incertitudes paramétriques et perturbations mal adaptées . . . . .	35
1.1.4.2 Choix de la surface de glissement . . . . .	36
1.1.4.3 Synthèse d'une commande par mode de glissement . . . . .	36
1.1.5 Conditions de convergence en temps fini (cas monovariante) . . . . .	39
1.2 Phénomène de broutement (chattering) . . . . .	40
1.2.1 Approximation continue de la commande par régime glissant . . . . .	40
1.2.2 Comportement à l'intérieur de la couche limite . . . . .	44
1.2.3 Couche limite variable . . . . .	48
1.2.4 Introduction de l'action intégrale . . . . .	50
1.3 Exemple de simulation . . . . .	51

1.4	Présentation du banc d'essai . . . . .	54
1.4.0.1	Description du banc d'essai . . . . .	54
1.4.0.2	Carte d'acquisition . . . . .	56
1.4.0.3	Les capteurs . . . . .	56
1.4.0.4	L'actionneur . . . . .	56
1.4.1	Modélisation . . . . .	57
1.4.1.1	Modèle dynamique du système à deux colonnes . . . . .	58
1.4.1.2	Les contraintes du système . . . . .	59
1.4.1.3	La forte non linéarité du système physique . . . . .	59
1.5	Conception d'une loi de commande robuste par mode de glissement d'ordre un . . . . .	62
1.5.1	Présentation de la loi de commande . . . . .	62
1.5.2	Résultats expérimentaux de la CMG classique . . . . .	65
1.5.3	Résultats expérimentaux avec couche limite variable . . . . .	68
1.5.4	Introduction de l'action intégrale . . . . .	69
1.6	Conclusion . . . . .	71
<b>2</b>	<b>Commande par mode de glissement d'ordre supérieur</b>	<b>73</b>
2.1	Formulation du problème . . . . .	74
Introduction	. . . . .	74
2.2	Mode de glissement réel . . . . .	75
2.3	Surface généralisée et degré relatif . . . . .	77
2.4	Mode de glissement d'ordre supérieur . . . . .	79
2.4.1	Mode de glissement d'ordre deux . . . . .	79
2.4.2	Algorithme du twisting . . . . .	83
2.4.3	Algorithme du super twisting . . . . .	85
2.4.4	Algorithmes par modes glissants d'ordre quelconque . . . . .	86
2.4.5	Algorithme sous-optimal . . . . .	88
2.5	Différentiateur robuste via modes glissants d'ordre supérieur . . . . .	89
2.6	Application de la commande par mode de glissement d'ordre deux . . . . .	91
2.6.1	Algorithme du twisting . . . . .	91
2.6.1.1	Synthèse de la commande . . . . .	91

2.6.1.2	Résultats expérimentaux . . . . .	92
2.6.2	Algorithme du super-twisting . . . . .	95
2.6.2.1	Synthèse de la commande . . . . .	95
2.6.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	97
2.7	Conclusion . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Théories et Application de la Commande par backstepping adaptatif</b>	<b>101</b>
3.1	Principe de la technique du backstepping . . . . .	102
	Introduction . . . . .	104
3.2	Synthèse récursive par Backstepping . . . . .	105
3.2.1	Cas des systèmes sous forme "strict-feedback" . . . . .	105
3.2.2	Exemple . . . . .	107
3.3	Stabilisation avec incertitudes . . . . .	110
3.3.1	Stabilisation robuste . . . . .	110
3.3.2	Backstepping avec incertitudes . . . . .	112
3.4	Backstepping Adaptatif et fonctions de réglages . . . . .	114
3.4.1	Algorithme de base . . . . .	115
3.4.2	Réduction du surparamétrage . . . . .	117
3.4.3	Fonctions de réglage pour un système d'ordre " $n$ " . . . . .	119
3.4.4	Exemple de simulation . . . . .	120
3.5	Application de la CBC sur un système de 3 cuves . . . . .	123
3.5.1	Conception de la loi de Commande . . . . .	124
3.5.2	Analyse de stabilité . . . . .	126
3.6	Application de la CBA sur un système de 3 cuves . . . . .	127
3.7	Résultats expérimentaux . . . . .	131
3.8	Conclusion . . . . .	135
<b>4</b>	<b>Combinaison du backstepping adaptatif avec les modes glissants</b>	<b>137</b>
4.1	Systèmes non linéaires incertains . . . . .	138
	Introduction . . . . .	138
4.2	Combinaison du backstepping avec le mode glissant . . . . .	140
4.2.1	Systèmes tridimensionnels . . . . .	140

4.2.2	Procédure de conception pour le cas général . . . . .	144
4.3	Procédure de conception de la CBAMG . . . . .	145
4.4	Application de la CBAMG au système hydraulique . . . . .	148
4.4.1	Conception de la commande . . . . .	148
4.4.2	Analyse de la stabilité . . . . .	151
4.5	Combinaison du backstepping avec les modes glissants d'ordre deux . . . .	157
4.6	Conclusion . . . . .	165
<b>Annexes</b>		<b>173</b>
<b>A Preuve de la convergence de l'algorithme de twisting</b>		<b>175</b>
<b>B Outils mathématiques et concept de stabilité</b>		<b>179</b>
B.1	Outils mathématiques . . . . .	179
B.2	Notion de stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	180
B.2.1	Définitions . . . . .	180
B.2.2	Méthode directe de Lyapunov . . . . .	181
B.2.3	Théorème de LaSalle et Lemme de Barbalat . . . . .	182
<b>C Rappel sur la relation de Bernoulli</b>		<b>185</b>
<b>D Les principales caractéristiques de la carte Dspace 1102</b>		<b>187</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>189</b>

# Notations et abréviations

## Notations générales

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	: ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}^n$	: ensemble des vecteurs réels de dimension $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	: ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$\  \cdot \ $	: norme vectorielle (ou matricielle) Euclidienne.
$\mathcal{M} < 0$	: $\mathcal{M}$ définie négative.
$\mathcal{M} \preceq 0$	: $\mathcal{M}$ semi définie négative.
$\mathcal{M} > 0$	: $\mathcal{M}$ définie positive.
$\mathcal{M} \succeq 0$	: $\mathcal{M}$ semi définie positive.
$\text{diag}[\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k]$	: matrice bloc-diagonal dont les blocs diagonaux sont les $\mathcal{M}_i$ .
$\det(\mathcal{M})$	: déterminant de la matrice carrée $\mathcal{M}$ .
$\text{rag}(\mathcal{M})$	: rang de la matrice $\mathcal{M}$ .
$(\mathcal{M})^{-1}$	: inverse de la matrice carrée $\mathcal{M}$ .
$(\mathcal{M})^T$	: transposée de la matrice $\mathcal{M}$ .
$[a, b]$	: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$]a, b[$	: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$[a, b)$	: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$\mathcal{C}^0(E, F)$	: ensemble des fonctions continues de $E$ dans $F$ .
$\mathcal{C}^k(E, F)$	: ensemble des fonctions de classe $k$ de $E$ dans $F$ .
$t \in \mathbb{R}$	: variable temporelle.
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	: dérivée de la variable $x$ par rapport au temps.
$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$	: dérivée seconde de la variable $x$ par rapport au temps.
$x^{(j)} = \frac{d^j x}{dt^j}$	: dérivée $j^{\text{eme}}$ de la variable $x$ par rapport au temps.

$x^T$	: transposé du vecteur $x$ .
$x \in \mathbb{R}^n$	: vecteur de composantes $x_j$ .
$Vect\{g_1, \dots, g_m\}$	: distribution engendrée par les champs de vecteurs $g_1, \dots, g_m$ .
$\mathcal{S}$	: variable (hypersurface) de glissement.
$s$	: surface de glissement.
$\partial$	: dérivée partielle.
$p$	: variable de Laplace.
$\mathcal{W}$	: fonction définie positive.
$x$	: variable d'état.
$x_2$	: variable de sortie.
$n$	: l'ordre du système.
$r$	: le degré relatif.

## Caractères grecs

$\phi$	: l'amplitude de la couche limite du domaine de glissement.
$\varepsilon(t)$	: variable d'erreur dans le mode glissant.
$\alpha$	: commande virtuelle dans le backstepping.
$\delta$	: incertitude.
$\ \delta\ _\infty$	: borne supérieure de $\ \delta\ $ .
$\psi$	: vecteur de fonctions non linéaires connues.
$\gamma$	: gain d'adaptation.
$\Gamma$	: matrice des gains d'adaptation.
$\rho$	: fonction de classe $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}_\infty$ .
$\tau$	: fonction de réglage.
$\tau_e$	: période échantillonnage.
$\theta$	: vecteur des paramètres inconnus.
$\hat{\theta}$	: vecteur des erreurs d'estimation des paramètres.
$\eta$	: les incertitudes dans le système (chapitre4).

## Notations spécifiques au système de 3 colonnes

$A$	: section de cuve.
$S_n$	: section des vannes de connexion.
$S_L$	: section des vannes de fuite.
$a_{zi}$	: coefficient de conduite entre les colonnes ( $i = 1, 2, 3$ ).
$b_{zi}$	: coefficient de conduite de fuite ( $i = 1, 2, 3$ ).
$g$	: constante de gravitation.
$h_{max}$	: hauteur maximale de l'eau dans les cuves.
$Q_{imax}$	: débit maximal de la pompe $i(i = 1; 2)$ .

## Abréviations

CMG	: Commande par Mode de Glissement.
CMGS	: Commande par Mode de Glissement avec la fonction de Saturation.
CMGCLV	: Commande par Mode de Glissement avec la Couche Limite Variable.
CMGI	: Commande par Mode de Glissement avec action Intégrale.
CMGOD1	: Commande par Mode de Glissement d'Ordre Deux (twisting).
CMGOD2	: Commande par Mode de Glissement d'Ordre Deux (super-twisting).
FCL	: Fonction Candidate de Lyapunov.
CBC	: Commande par Backstepping Classique.
CBA	: Commande par Backstepping Adaptatif.
SF	: Strict Feedback.
CBAMG	: Commande par Backstepping Adaptatif Mode de Glissement.
CBMGOD	: Commande par Backstepping Mode de Glissement d'Ordre Deux.
NLD	: Non Linear Damping.
RSS	: Rétroaction Semi Strict.
PPF	: Parametric Pure Feedback.



# Introduction générale

## 0.1 Contexte du travail

Dans toute formulation d'un problème de commande, le modèle mathématique développé dans le but d'établir la loi de commande ne reflète pas exactement le processus réel. La modélisation théorique requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des relations mathématiques. Les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables, notamment pour leur commande. Le grand problème de l'automaticien est de représenter ces systèmes physiques avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable. On doit néanmoins s'assurer que, malgré toutes ces incertitudes, la loi de commande résultante permet d'atteindre les objectifs prédéfinis. Ceci a conduit à un important intérêt pour la synthèse de contrôles dits robustes et capables de pallier à ce problème.

En automatique, pour décrire le comportement d'un système, une hypothèse communément faite est la linéarité du système, car les techniques d'analyse des modèles linéaires, ont été largement développées dans la littérature. Cependant, l'hypothèse de linéarité n'est vérifiée que dans une plage de fonctionnement restreinte autour d'un point d'équilibre du système. Alors, les performances du modèle se dégradent dès qu'on s'en éloigne et la recherche d'un modèle plus adapté et notamment non linéaire devient nécessaire. Maîtriser l'effet des non-linéarités d'un modèle sans avoir besoin de l'hypothèse de linéarité autour d'un point de fonctionnement était donc un défi de taille pour les chercheurs. Dans un cadre non linéaire, si le domaine de fonctionnement est restreint, les modèles linéaires fournissent une bonne approximation des procédés non linéaires (équivalent au premier ordre

d'un développement en série de Taylor des fonctions non linéaires). Cependant, cette approximation devient insuffisante si l'on considère des systèmes complexes à large domaine de fonctionnement (robotique, aviation, procédés économiques ou écologiques, etc). Dans ce cas, il s'avère nécessaire de faire appel aux méthodologies d'analyse des procédés non linéaires. Sur le plan théorique, ce problème a été résolu par le développement de techniques de commande non-linéaire basées sur la théorie de la géométrie différentielle. En plus de la problématique susmentionnée, un autre problème d'ordre théorique se pose lors de l'application de ces types de commande à un problème pratique : celui de la robustesse.

## 0.2 Travaux effectués

Pour positionner notre travail, il est nécessaire de citer les travaux déjà réalisés. Dès le début des années 1980, la commande par mode de glissement a connu un intérêt croissant chez les automaticiens. Elle se range dans la catégorie des commandes en boucle fermée à structure variable, et possède à ce titre un caractère non linéaire. Elle présente en outre des qualités de convergence en un temps fini et une robustesse face à une large classe d'incertitudes et de perturbations extérieures. Ces différents points justifient son application dans des domaines très variés tels que la robotique, la mécanique ou l'électrotechnique [BSE96, BD95, SK95], [XLP03, FX05, CTDGLR08, MCAVAB08]; [BD95, ES96, LL05, WRPS02]; [Fos91, Fos77, ZEGB82]; [BDB96, CdWS91, HB96, KZ95, Ina07].

Cependant, ce type de commande est à l'origine du phénomène bien connu de chattering. En effet, ce phénomène est indésirable car :

- Il implique une grande sollicitation de l'organe de commande, ce qui empêche son application à des systèmes réels.
- Il peut exciter les dynamiques hautes fréquences négligées au cours de la modélisation [Utk83].
- Il augmente le degré relatif du système et perturbe le mode de glissement idéal [Utk83, BBKU85, Fri85].

Pour réduire ce phénomène de chattering de nombreuses solutions ont été proposées parmi lesquelles on peut citer :

- Le remplacement, à l'intérieur de la couche limite, de la commande discontinue par une commande continue voir les travaux de [Utk77, DSM88, Slo84, SL91].
- L'utilisation d'observateurs d'états asymptotiques.
- L'introduction des modes glissants d'ordres supérieures [EK193, Lev93, FL02, Utk06] dont le principe est de rejeter les discontinuités au niveau des dérivées supérieures de l'entrée du système.

Depuis 1996, le nombre de publications sur la théorie du mode de glissement d'ordre supérieur ont augmenté de façon significative par les efforts du professeur Bartolini et son groupe [BFU97, BPU01, BPPU03]. Deux autres contributions importantes de Levant qui propose une commande par mode de glissement (CMG) d'ordre arbitraire en 2001 [Lev01] et un différentiateur d'ordre quelconque asymptotiquement optimale en 2003 [Lev03]. Ces deux derniers ont permis la conception et la mise en œuvre d'une commande avec un différentiateur d'ordre quelconque [Lev05]. Cependant, la conception de nouveaux types de contrôleurs par Mode de Glissement d'Ordre Supérieur (MGOS) reste compliquée. Récemment, la généralisation de la conception d'algorithmes de commande d'ordre universel arbitraire MGOS a été élaborée, basée sur les propriétés d'homogénéité [Lev05] et de quasi-homogénéité [Orl05] de la dynamique du MGOS. D'autres applications sur l'ordre supérieur peuvent être trouvées dans [LSBP04, PU04, KS06, NFP08].

Dans les années 1990 une nouvelle famille d'algorithmes de commandes adaptatives utilisant l'approche backstepping a été développée. Ce type de contrôle permet la synthèse systématique de contrôleurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires triangulaires. Son principe est basé sur la construction progressive d'une fonction de Lyapunov et la mise au point d'une loi de commande permettant la négativité de sa dérivée. [DD96, JN97, ASBK00, LK05, UUP06].

Quand les limites supérieures des incertitudes sont inconnues, on fait appel au backstepping adaptatif. Dans Bodson et al. [BCNR93], une version adaptative basée sur l'identification des paramètres du système en temps différé est présentée. Blauch et al. [BBC93], ont présenté une méthode d'identification de paramètres basée sur la technique des moindres carrés et qui a besoin de dériver les états du système. Ces deux versions présentent l'inconvénient d'être en temps différé. En effet, si un ou plusieurs paramètres changent durant le fonctionnement, ces méthodes ne seront plus valables. D'autre part, Grcar et al.

[GCZG96], ont présenté une version adaptative basée sur une linéarisation exacte et qui utilise les techniques de Lyapunov afin de concevoir un signal de commande qui compense continuellement les chutes de tension produites par les paramètres incertains.

Dans [KAALLA08], une nouvelle méthode d'estimation des paramètres variables en temps réel d'une grande classe des systèmes non linéaires a été proposée. L'algorithme développé est potentiellement utile pour ajuster les paramètres du contrôleur des entraînements à vitesse variable (machine asynchrone). Mais la stabilité de l'ensemble n'est pas démontrée. Dans [AAKLL09], l'auteur propose une méthode d'identification des systèmes non linéaires avec des paramètres variables dans le temps utilisant un observateur basé sur la combinaison entre le mode glissant et les réseaux de neurones. Dans [ZW05], l'auteur valide la technique du backstepping adaptatif sur un moteur synchrone après avoir linéariser le système. Sans oublier les travaux de Marino sur la commande et l'estimation en temps réel des paramètres de la machine asynchrone avec incertitudes [MT99, MTV05, MTV08]. La commande par mode de glissement a été associée avec d'autres types de commande robuste et adaptative telle que la logique floue [Haj96, Wai01], la commande prédictive [PdIPC02], la linéarisation entrée-sortie [BE01, ECRC02], les réseaux de neurones [WC03, LL05], la passivité [VPB03], le backstepping, [KZ99, LCH07]. Une autre combinaison du mode glissant d'ordre supérieur basée sur l'algorithme sous optimal a été présentée par [FL01, LSBP04], etc.

### 0.3 Objectifs de la thèse

L'analyse et la synthèse de lois de commande des systèmes incertains ont été largement abordées dans la littérature ces deux dernières décennies. Cependant, les solutions théoriques proposées pour résoudre analytiquement les problèmes de commande des systèmes partiellement connus, n'ont pas été suffisamment validées expérimentalement sur des systèmes réels complexes. En effet, ces solutions sont souvent peu aisées à mettre en œuvre. L'objectif global de cette thèse, est l'élaboration de lois de commandes robustes avec pour idée maîtresse l'étude expérimentale approfondie d'un cas concret de systèmes complexes : la régulation d'un système hydraulique à trois cuves. Dans la première phase du travail, nous avons cherché à mettre en évidence les difficultés d'applicabilité concrète

d'une loi de commande sur des modèles de systèmes non standard, ceci à travers des adaptations d'algorithmes de la littérature.

En se basant sur cette première phase nous avons élaboré des algorithmes permettant une mise en œuvre simple pour la commande des systèmes non linéaire incertains. Ces algorithmes incluent les approches modes glissants (CMG d'ordre un et deux) et les techniques backstepping (classique et adaptative). Toutes nos stratégies de commande ont été validées expérimentalement. Dans ce travail de thèse, nous avons cherché à apporter des réponses aux questions suivantes :

- Comment atténuer voire éliminer le phénomène de chatterring dans l'approche mode glissant ?
- Est-ce que l'approche mode glissant d'ordre 2 conduit à des résultats satisfaisants ?
- Comment adapter l'approche backstepping classique ou adaptatif sur un système ne respectant pas la forme "Strict feedback" ?
- Cette adaptation permet-elle d'assurer la stabilité de la boucle fermée ainsi qu'un niveau raisonnable de performances asymptotiques, en présence de dynamiques négligées et/ou d'incertitudes bornées ?
- Dans le cas du système hydraulique étudié, le problème de surparamétrisation est-il résolu ?
- Est-ce que la combinaison entre les approches CMG et backstepping adaptatif permet-elle d'assurer un bon comportement transitoire et de meilleure performance ?
- Est-ce que nos stratégies de commandes en présence de bruit de mesure donnent-elles des satisfactions sur le système hydraulique non linéaire à paramètres incertains variant dans le temps (dus aux variations de volumes dans les vannes de connexions) ?
- Est-ce que les stratégies étudiées sont-elles mises aisément en œuvre expérimentalement sur notre banc d'essai à trois cuves ?

Devant les défis d'ordre théorique et pratique mentionnés ci-dessus, nous avons cherché à concilier une démarche de mise en œuvre pratique avec les fondements théoriques. Ainsi, les réponses concrètes apportées aux questions ci-dessus s'articulent autour de l'association de différents critères techniques de contrôle des systèmes complexes. Les lignes qui suivent résument notre contribution :

1. Les stratégies de commande étudiées sont des commandes non-linéaires utilisant les techniques des modes glissants d'ordre un et deux, du backstepping classique et adaptatif appliquées à un système interconnecté hydraulique à trois cuves.
2. Concernant la CMG d'ordre 1 classique, nous proposons deux solutions de commande qui présentent des propriétés de robustesse supérieure à celles garanties par la CMG de base. La première concerne le rejet d'une classe d'erreurs de modélisation, en présence de perturbations extérieures. Pour ce faire une action intégrale est introduite dans la CMG d'ordre 1 afin de compenser l'erreur en régime permanent sous certaine condition. Une deuxième solution pour diminuer le phénomène de broutement provoqué par la CMG classique est de proposer un algorithme avec une couche limite variable [BMMCA<sup>+</sup>09], [BMMLB09].
3. Pour rendre possible l'implantation pratique de la commande, nous mettons en œuvre un différentiateur robuste basé sur la technique des modes glissants d'ordre supérieure, pour estimer ou dériver une sortie bruitée [BCABC09b], [BCABC09c].
4. Le nouvel algorithme de commande d'un banc d'essais à 3 colonnes que nous proposons est basé sur le backstepping adaptatif. Le modèle associé à ce système n'a pas la forme standard triangulaire, alors que la majorité des applications dans la littérature est réalisée sur des systèmes sous forme triangulaire. L'avantage de notre algorithme de commande est qu'il permet de résoudre le problème de surparamétrisation, contrairement aux méthodes proposées par [HHVM05] pour la commande d'un système à deux colonnes interconnectées [BCADB09], [BCABC09a].
5. Une autre contribution concerne la combinaison entre le concept backstepping adaptatif et le mode glissant d'ordre 1. L'avantage de cette stratégie réside dans la simplicité de synthèse de la surface de glissement. On note également un meilleur comportement transitoire lors de rejet de perturbation brusque [BCABC10a].
6. Pour réduire à la fois la complexité du contrôleur et le temps de calcul, nous proposons une solution qui consiste à associer le backstepping classique et la technique super twisting de l'approche CMG d'ordre supérieur. Cette solution améliore la robustesse de la commande face aux variations paramétriques ; elle permet également d'atténuer considérablement le phénomène de broutement [BCABC10b].

## 0.4 Plan du mémoire

La thèse s'articule donc autour des chapitres suivants :

### Chapitre 1

Le premier chapitre comporte deux parties. La première partie est consacrée à un bref rappel de la commande à structure variable. Des éléments théoriques nécessaires à la compréhension du mode de glissement sont introduits. Nous abordons également les conditions d'existence du mode de glissement ainsi que les différentes méthodes qui permettent sa détermination (méthode de Filippov, méthode de la commande équivalente). Dans la deuxième partie, nous présentons la conception d'un contrôleur non-linéaire basé sur la technique de mode glissant d'ordre un et utilisant les fonctions d'adoucissement afin de diminuer l'effet de broutement. Ce contrôleur est appliqué à la régulation de niveau d'un système à trois cuves ; ses performances sont comparées à celles d'un contrôleur par mode de glissement classique. Nous montrons que, le contrôleur non-linéaire élaboré utilisant les fonctions d'adoucissement n'est pas robuste, notamment lors des variations paramétriques du modèle du système. Nous proposons deux algorithmes. Le premier est basé sur l'introduction d'une action intégrale afin d'assurer le rejet d'une classe d'erreurs de modélisation, en présence de perturbations extérieures. Le second est basé sur l'utilisation d'une couche limite variable pour atténuer l'effet de broutement.

### Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre nous nous intéressons aux méthodes de commande par modes glissants d'ordre supérieur. Nous décrivons en particulier les algorithmes dédiés aux modes glissants d'ordre deux. Deux commandes par modes glissants d'ordre supérieur à convergence en un temps fini sont développées : la première est fondée sur l'algorithme de twisting, la seconde est une commande à trajectoire convergente (principe de super twisting simplifié). Ces commandes sont élaborées et mises en œuvre sur un banc d'essais. Nous présentons également dans ce chapitre un différentiateur robuste basé sur la technique des modes glissants. Ce différentiateur est utilisé pour estimer la dérivée de la surface de glissement à partir des états mesurés.

## Chapitre 3

Les techniques de commande non linéaires basées sur le backstepping font l'objet du troisième chapitre. Le concept du backstepping bien adapté aux systèmes présentant une structure pyramidale, est basé sur la synthèse récurrente des fonction de Lyapunov qui assurent pas à pas la stabilisation de chaque étape du système. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. Cette technique permet également de construire un contrôleur adaptatif. Cet aspect est exploité dans la première partie du chapitre, pour élaborer un contrôleur adaptatif non linéaire qui tient compte des incertitudes dans les paramètres du système, contrairement aux méthodes non linéaires classiques. Les paramètres inhérents à la régulation d'un système hydraulique tels que le coefficient de débit entre les cuves et du coefficient de fuite sont pris en compte. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'étude des performances en temps réel du contrôleur adaptatif non-linéaire mis en œuvre. Ses performances sont comparées à celles d'un contrôleur non linéaire du backstepping classique.

## Chapitre 4

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la stabilisation du niveau du liquide dans un système hydraulique à 3 cuves. L'approche développée dans le premier chapitre et la technique de commande adaptative par backstepping sont combinées pour élaborer une commande implantable en temps réel. Un deuxième algorithme associant la commande par modes glissants d'ordre deux et la technique de stabilisation par backstepping est également proposé. Cet algorithme bien adapté pour des systèmes non linéaires incertains permet de garantir l'établissement d'un régime glissant d'ordre deux avec un réglage simple des paramètres de la loi de commande. L'efficacité de cette stratégie de commande est illustrée par des tests expérimentaux sur un système hydraulique à 3 cuves, système fortement non linéaire.

## Conclusions et Perspectives

Enfin dans une dernière partie, nous présentons les conclusions générales de ce travail ainsi que les perspectives qui se présentent pour la suite des recherches sur le sujet.

# Chapitre 1

## Modélisation et Commande par modes glissants

### Introduction

De nombreuses techniques de commande non linéaire ont été développées depuis le début des années 80, telles que, la commande floue, la commande neuronale [BS90], [Mam75], [TS85], la commande linéarisante par bouclage entrées-sorties [Isi00], et également la technique des modes glissants. Cette technique consiste à définir une surface dite de glissement, et une loi de Commande par Mode de Glissement (CMG) obtenue de manière à conduire et à contraindre le système à rester au voisinage d'une surface dite de "commutation".

La CMG s'inscrit dans la théorie des systèmes à structure variable qui a pour but l'obtention, en boucle fermée, d'une dynamique largement indépendante de celle du processus et surtout de ses variations éventuelles. En ce sens, la commande à structure variable est une commande non linéaire qui possède la propriété de robustesse [Efe04], [ES00b, ES00a], [Gao93], [SR88], [Utk77], [Eme67], [WLT98, ZO99, LLO03, DK04, GKY05], [AZ06]. Elle est basée sur la commutation des fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hypersurface de glissement, dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de la variété. Quand l'état est maintenu sur cette hypersurface, le système se trouve en régime glissant, et sa dynamique est alors insensible aux variations des paramètres du processus, aux erreurs de modélisation et à

certaines perturbations extérieures tant que le régime glissant est assuré, [Dra69], [Utk77], [ES00b].

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à une présentation générale des concepts de base de la CMG. Son principe, ses propriétés de robustesse ainsi que ses défauts sont abordés. Dans un second temps, un nouvel algorithme de CMG est proposé. Ce dernier est basé sur le remplacement de la couche limite constante par une autre, variable dans le temps. Cet algorithme permet d'obtenir un bon suivi de trajectoire et de diminuer le phénomène de chattering. A titre d'illustration, un exemple de simulation est développé. L'objectif de l'exemple choisi est de mettre en évidence les particularités de la CMG par l'approche proposée combinée avec une action intégrale. Une comparaison est proposée avec d'autres méthodes. Enfin, nous présentons la modélisation du système et les premiers résultats expérimentaux obtenus par les différentes méthodes proposées au cours de ce chapitre.

## 1.1 Les systèmes à structure variable en mode glissant

Les systèmes à structure variable sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permettra de commuter à tout instant entre les différentes structures, en combinant les propriétés utiles de chacune de ces structures, afin d'avoir le comportement désiré du système. Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x, t, u) \quad (1.1)$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état ;  $u \in \mathbb{R}$  est le vecteur de commande. On définit également  $s \in \mathbb{R}$ , une fonction suffisamment différentiable, telle que  $\frac{\partial s}{\partial x}$  soit non nulle, la variété de glissement est définie par :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\} \quad (1.2)$$

Dans le but de maintenir l'état représentatif de l'évolution du système sur une variété  $S$ , on définit le vecteur de commande  $u$  qui commute entre deux valeurs ( $u^-$ ,  $u^+$ ) selon le

signe de la surface de commutation  $s(x)$  :

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$u^+(x, t)$  et  $u^-(x, t)$  étant des fonctions continues.  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$  est une variété de glissement qui divise l'espace d'état en deux parties disjointes  $s(x) > 0$  et  $s(x) < 0$ . Cette logique de commutation a pour but de contraindre la trajectoire à suivre la surface de commutation. On dit alors que la trajectoire du système glisse le long de la surface de commutation  $s(x) = 0$  et on parle alors du phénomène de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de deux parties : le mode d'accès

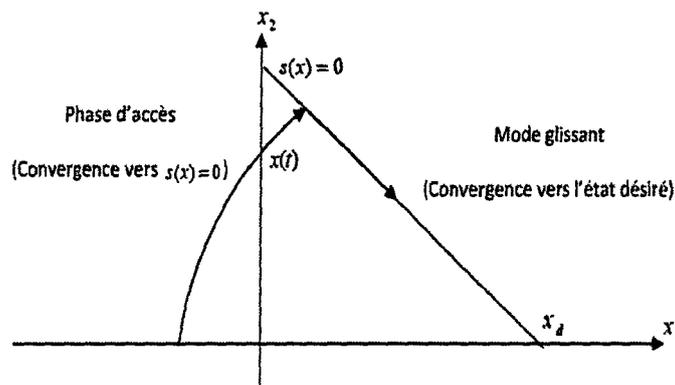


Figure 1.1 : Trajectoire d'état dans le plan de phase.

(reaching mode) et le mode de glissement (figure 1.1). Dans la première phase, l'état du système (à partir d'une condition initiale quelconque  $x_1(0) = x_0$ ) tend vers une surface de commutation  $s(x) = 0$ . La deuxième phase est caractérisée par le mode de glissement durant lequel la variable d'état évolue sur la surface de glissement et converge vers l'état désiré  $x_d(t)$ .

### 1.1.1 Approche de Filippov

Les trajectoires du système sur la surface  $s(x)$  ne sont pas clairement définies puisque le vecteur de commande  $u$  n'est pas défini pour  $s = 0$ . Filippov a introduit une solution à ce problème en termes d'inclusion différentielle [UGS99].

Soit  $D^+$  et  $D^-$  les deux régions dans l'espace d'état (séparées par la variété  $S$ ) définies

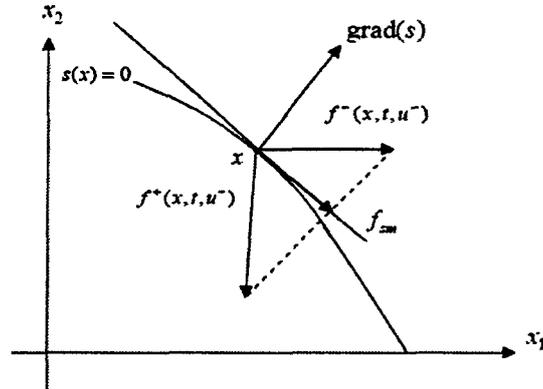


Figure 1.2 : Mode de glissement au sens de Filippov.

comme suit :

$$D^+ = \{x \in \mathbb{R}^n, s(x) > 0\} \quad \text{et} \quad D^- = \{x \in \mathbb{R}^n, s(x) < 0\}$$

Nous appellerons  $f_n^+$  et  $f_n^-$  les projections respectives de  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la surface  $s(x) = 0$  (figure 1.2). La fonction  $f(x, t, u)$  est discontinue autour de  $s(x) = 0$ .

$$f(x, t, u) = \begin{cases} f^+ = f(x, t, u^+) & \text{si } s(x) > 0 \\ f^- = f(x, t, u^-) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $x(t)$  du système (1.1) sont fournies par le théorème de Filippov suivant :

**Théorème 1.1.** [Fil60] *Considérons le système décrit par l'équation (1.1) satisfaisant la condition*

$$\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in D^+ \cup D^-, \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

*Soit une fonction  $s(x, t)$  deux fois différentiables, telle que  $f_n^+$  et  $f_n^-$  soient continues par rapport à  $x$  et  $t$ , pour  $x$  solution de  $s = 0$ . Le vecteur  $h = f_n^+ - f_n^-$  est continûment différentiable. Si en chaque point de la surface  $s = 0$ , les inégalités  $f_n^+ < 0$  et  $f_n^- > 0$  sont vérifiées, il existe alors dans le domaine  $D$  une solution unique de l'équation (1.1) qui dépend des conditions initiales de façon continue.*

On peut conclure à partir de ce théorème que si les conditions de glissement  $f_n^+ < 0$  et  $f_n^- > 0$  sont vérifiées, la trajectoire de phase atteint et reste sur la surface de commutation,

ce qui signifie que  $s$  est attractive au moins dans un voisinage.

La solution unique du système (1.1) pour  $x \in S$  est définie par :

$$\begin{cases} x \in S \\ \dot{x} = f_{sm}(x, t) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $f_{sm} \in \{\text{c}\overline{\text{onv}}(F)_x \cap T_x s\}$ , où  $\text{conv}(F)$  est le plus petit espace convexe engendré par  $f^+$  et  $f^-$  en  $x$ ,  $\text{c}\overline{\text{onv}}(\cdot)$  sa fermeture et  $T_x s$  l'espace tangent à  $s$  en  $x$ . Pour un point sur la surface de glissement, la dynamique équivalente au sens de Filippov [Fil83] est donnée par :

$$f_{sm} = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- \quad (1.6)$$

Le paramètre  $\alpha$  est choisi de manière à avoir le vecteur de vitesse  $f_{sm}$  tangent à la surface de commutation, autrement dit :

$$\text{grad}[s(x)]f_{sm} = 0 \quad \text{avec} \quad \text{grad}[s(x)] = [\partial s / \partial x_1, \dots, \partial s / \partial x_n] \quad (1.7)$$

En remplaçant  $f_{sm}$  par son expression donnée par l'équation (1.6), on obtient :

$$\text{grad}[s(x)][\alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-] = 0 \quad (1.8)$$

La résolution de l'équation (1.8) permet d'obtenir la valeur de  $\alpha$  pour que les trajectoires de phases pendant le régime glissant restent sur la surface de glissement  $s(x) = 0$ , soit :

$$\alpha = \frac{\text{grad}[s(x)]f^-}{\text{grad}[s(x)](f^- - f^+)} \quad (1.9)$$

En substituant l'équation (1.9) dans l'expression de  $f_{sm}$  (1.6), la dynamique de glissement est alors donnée par :

$$\dot{x} = f_{sm} = \frac{\text{grad}[s(x)]f^-}{\text{grad}[s(x)](f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}[s(x)]f^+}{\text{grad}[s(x)](f^- - f^+)} f^-$$

Les valeurs que prend  $f(x, t)$  en mode glissant au voisinage de  $s(x) = 0$ , génèrent des solutions contraintes à glisser sur la surface de commutation avec,  $\dot{s}^+ = \text{grad}(s)f^+ < 0$  et  $\dot{s}^- = \text{grad}(s)f^- > 0$ , et par conséquent la trajectoire de phase du système (1.1) reste sur la surface  $s(x)$ . Lorsque le système est en régime glissant, les trajectoires doivent rester et évoluer sur la surface de commutation  $s$ , en effet la dérivée de la surface de glissement au voisinage de l'hyperplan de commutation, doit être de signe opposé à celui de la surface

$s(x)$ . Les conditions suffisantes pour garantir l'existence des modes glissants sont alors décrites par :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s}(x) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s}(x) > 0 \quad (1.10)$$

Ces deux conditions peuvent se résumer par l'inégalité suivante :

$$s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (1.11)$$

Cette condition, appelée condition de glissement qui est aussi une condition nécessaire

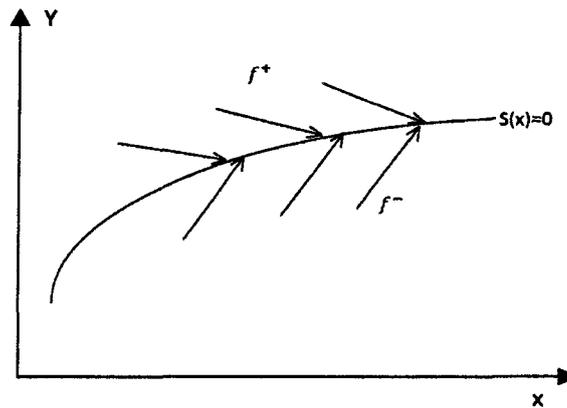


Figure 1.3 : Attractivité de la surface

et suffisante de stabilité, représente l'inégalité fondamentale pour la synthèse de la commande par mode de glissement. Elle traduit le fait que si les projections de  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la surface  $s(x) = 0$  sont de signes opposés, alors leurs trajectoires convergent vers la variété  $S$  et qui ont la particularité de glisser sur celle-ci, d'où l'attractivité de la surface  $s(x)$  (figure 1.3).

La condition d'attractivité basée sur la théorie de Filippov décrite dans l'équation (1.11) est difficilement applicable dans le cas des systèmes multivariables. Pour résoudre ce problème, la méthode proposée par Utkin [Utk77], appelée approche de la commande équivalente, est présentée par la suite. Elle est basée sur le choix d'une fonction de Lyapunov qui satisfait la stabilité asymptotique du système et garantit une convergence en temps fini.

### 1.1.2 Approche de la commande équivalente

En mode de glissement idéal, on suppose que la commande discontinue commute à haute fréquence dirigeant le vecteur d'état avec précision vers la surface de glissement.

Malheureusement, la commutation rapide n'est pas réalisable dans la pratique. En effet pendant le mode de glissement, il existe toujours un temps de retard à la commutation, et donc une apparition de diverses imperfections, qui font osciller les états à proximité de la surface. On considère alors que le mode de glissement se produit au voisinage de  $s(x) = 0$ . Afin de rendre la surface invariante dans le temps ( $\dot{s} = 0$ ), Utkin a proposé une méthode dite "commande équivalente" qui permet de maintenir l'état du système sur la surface de commutation et de diminuer l'amplitude de la discontinuité. Cette méthode représente la valeur moyenne que prendrait la commande  $u$  lors des commutations entre  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$ . Elle est composée d'une dynamique lente (composante continue injectée) à laquelle s'ajoute une composante rapide en haute fréquence (partie discontinue). La méthode de la commande équivalente consiste à admettre qu'en modes glissants tout se passe comme si le système était piloté par une commande dite commande équivalente [Utk92].

Considérons le système non linéaire affine en la commande, donné par le modèle dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) + b(x, t)u \quad (1.12)$$

avec  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  le vecteur d'état,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, t) = [f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t)]^T$  le champ de vecteur supposé lisse,  $b(x, t)$  est la matrice de commande de dimension  $n \times m$ .  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande tel que chacune de ses composantes  $u_i$  subisse une discontinuité sur une hypersurface, de dimension  $(n - 1)$ , suivant une loi de commande définie par l'équation (1.3).

Le procédé de conception de la commande par mode de glissement peut se faire en deux étapes. Il faut d'abord définir une surface de commutation telle que la dynamique du système soit stable, et ensuite concevoir une commande permettant le suivi de la surface de glissement. L'hypersurface de glissement est définie par :

$$\begin{aligned} S &= \{x : s(x, t) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^m \{x : s_i(x, t) = 0\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec :

$$s(x, t) = [s_1(x, t), \dots, s_m(x, t)]^T = 0$$

Nous cherchons une commande continue, vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \dot{s}(x, t) &= \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} [f(x, t) + b(x, t)u] + \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} \\ &= L_f s(x, t) + L_b s(x, t)u + \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $L_f s(x, t)$  est la dérivée de Lie de l'opérateur  $s(x, t)$  dans la direction  $f$ , et  $L_b s(x, t)$  est la dérivée de Lie de l'opérateur  $s(x, t)$  dans la direction  $b$ .

### 1.1.3 Conception de la commande

On suppose que la trajectoire du système (1.12) intercepte la surface  $s$  à  $t = T_r$ . Pour  $t \geq T_r$  un mode de glissement existe.  $T_r$  définit donc le temps que l'on met pour atteindre la surface de glissement. Il est appelé temps d'atteinte ou temps d'accès.

L'existence d'un mode de glissement implique :  $s(x, t) = 0$  et  $\dot{s}(x, t) = 0$ ,  $\forall t \geq T_r$ . Si la condition nécessaire pour l'existence de la commande équivalente (inversibilité de la matrice  $\frac{\partial s(x, t)}{\partial x} b(x, t)$ ) est vérifiée, alors la solution de l'équation (1.14) est donnée par :

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial s}{\partial x} b(x, t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t) \right] \quad (1.15)$$

En régime glissant, on obtient la dynamique suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) - b(x, t) \left[ \frac{\partial s}{\partial x} b(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t) - b(x, t) \left[ \frac{\partial s}{\partial x} b(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1.16)$$

L'approche générale basée sur la méthode directe de Lyapunov sera employée pour la conception de la commande. Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(s, x, t) = \frac{1}{2} s^T Q(x, t) s \quad (1.17)$$

où  $Q$  est une matrice de pondération symétrique définie positive. La stabilité asymptotique globale est assurée si la dérivée de (1.17) est strictement négative :

$$\dot{V}(s, x, t) < -G(V(s, x, t)) \quad (1.18)$$

où  $G(\cdot) \geq 0$ . Cette condition est équivalente à :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \left[ Q \frac{\partial s}{\partial t} + Q \frac{\partial s}{\partial x} f + \frac{\partial Q}{\partial t} s + \text{vec}^{-1} \left( \frac{\partial \text{vec}(Q)}{\partial x} f \right) s \right] \\ &+ s^T Q \frac{\partial s}{\partial x} b u + s^T \text{vec}^{-1} \left( \frac{\partial \text{vec}(Q)}{\partial x} b u \right) s < -G(V(s, x, t)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

(Pour plus d'explications sur les opérateurs  $vec$  et  $vec^{-1}$ , voir [Bre78])

Dans le cas où  $V(s, x, t) = s^T Q(x, t) s$  avec  $Q(x, t)$  constante et  $G(V) = 0$ , (1.19) devient

$$\dot{V} = s^T \left[ Q \frac{\partial s}{\partial t} + Q \frac{\partial s}{\partial x} f \right] + s^T Q \frac{\partial s}{\partial x} b u < 0 \quad (1.20)$$

Pour  $s \neq 0$ . Substituons  $u(t) = u_n(t) + u_{eq}(t)$ , avec  $u_{eq}(t)$  définie par (1.15), on obtient :

$$\dot{V} = s^T Q \frac{\partial s}{\partial x} b u_n$$

Le problème se réduit à sélectionner  $u_n$  pour garantir que  $\dot{V}(s, x, t) < 0$ .  $u_n$  peut être choisie par de nombreuses techniques [DSM88], [Utk78] de manière à satisfaire l'inégalité (1.20), avec :

$$u_n = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} b(x, t) \right]^{-1} \hat{u}_n$$

Les lois de commande plus utilisées sont indiquées dans le tableau 1.1.

La loi de commande $\hat{u}_n$	Conditions
$\hat{u}_n = -\frac{\alpha s}{\ s\ }$	$\alpha > 0 \forall s \neq 0$ et 0 sinon
$\hat{u}_n = -Ps$	$P$ est une matrice symétrique définie positive, $P = P^T > 0$
$\hat{u}_n = \rho_{ij} x$	$\rho_{ij} = \alpha_{ij} < 0$ si $s_i x_j > 0$ $= \alpha_{ij} > 0$ si $s_i x_j < 0$
$\hat{u}_n = -\alpha_{ii}(x, t) \text{sign}(s_i)$	$\alpha_{ii}(x, t) = \lambda_i [s_i^{2\delta} + \eta_i]$ avec $\lambda_i > 0, \eta_i > 0$ et $\delta \in \mathbb{N}$ .

Table 1.1 : Différentes stratégies de commande

## 1.1.4 Etude de robustesse

### 1.1.4.1 Modèle avec incertitudes paramétriques et perturbations mal adaptées

La plupart des systèmes non linéaires sont caractérisés par des incertitudes adaptés et/ou mal adaptés variant dans le temps, ce qui rend leurs commandes très délicates et complexes à mettre en œuvre. Dans ce qui suit, nous proposons de concevoir une commande par mode de glissement en présence de perturbations mal adaptées pour une classe

de systèmes représentés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \hat{f}_1(x, t) + \Delta f_1(x, t) + (\hat{b}(x, t) + \Delta b(x, t))u \\ \dot{x}_2 = \hat{f}_2(x, t) + \Delta f_2(x, t) + d(t) \\ y = x_2 \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $x_1 \in \Theta_1 \subset \mathbb{R}^m$ ,  $x_2 \in \Theta_2 \subset \mathbb{R}^{n-m}$ , sont deux vecteurs d'état  $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ .  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  est la commande bornée telle que :  $|u_i| \leq U_0$ , avec  $U_0 > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) et  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ .

$\hat{f}_1(x, t)$ ,  $\hat{f}_2(x, t)$  et  $\hat{b}(x, t)$  sont les fonctions estimées de  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$  et  $b(x, t)$ .  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $b(x, t)$  est une matrice ( $m \times m$ ), avec  $\text{rang}(b) = m$  et  $n > 2m$  [MM07].

$\Delta f_1(x, t)$ ,  $\Delta f_2(x, t)$  et  $\Delta b(x, t)$  sont des incertitudes paramétriques bornées.  $d(t)$  et sa dérivée par rapport au temps sont bornées,  $d(t) \in \mathbb{R}^p$  avec  $|d(t)| < D_0$  et  $|\dot{d}(t)| < D_1$ ,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$  est la sortie du système.

#### 1.1.4.2 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement peut être une expression linéaire ou non linéaire [SL91]. En suivi de trajectoire, la surface devra être choisie de façon à garantir la stabilité du point d'équilibre  $\tilde{x} = 0$  ( $\tilde{x}$  représente l'erreur d'état). C'est à dire que le choix de la surface doit assurer la stabilité du système en boucle fermée. Pour notre cas, nous allons choisir la surface de glissement en fonction de la sortie  $x_2(t)$  et de sa dérivée  $\dot{x}_2(t)$  :

$$s(x, t) = s(\dot{\tilde{x}}_2, \tilde{x}_2) \quad (1.22)$$

avec  $\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2ref}$ .  $x_{2ref} \in Y_{ref} \subset \mathbb{R}^m$  est le vecteur de la référence souhaitée.

Soit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{\partial s}{\partial \dot{\tilde{x}}_2} \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_1} & \hat{A}_2 &= \frac{\partial s}{\partial \dot{\tilde{x}}_2} \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s}{\partial x_2} & A_3 &= \frac{\partial s}{\partial \dot{\tilde{x}}_2} \\ \hat{A} &= \frac{\partial s}{\partial \dot{\tilde{x}}_2} \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_2} \hat{b} & M &= \frac{\partial s}{\partial \dot{\tilde{x}}_{2ref}} \ddot{x}_{2ref} + \frac{\partial s}{\partial x_{2ref}} \dot{x}_{2ref} \end{aligned}$$

#### 1.1.4.3 Synthèse d'une commande par mode de glissement

Dans cette section, nous allons déterminer une loi de commande, capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et de les maintenir sur cette

surface.

Soit  $F(x)$  une fonction vectorielle telle que :

$$F(x) = \hat{F}(x) + \Delta F(x) = \hat{A}_1 \hat{f}_1 + \hat{A}_2 \hat{f}_2 + M + \hat{A}_1 \Delta f_1 + \hat{A}_2 \Delta f_2 + \hat{A}_3 \Delta f_2 + \hat{A}_2 d + A_3 d \quad (1.23)$$

avec les matrices  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}_1$ ,  $\hat{A}_2$ ,  $A_3$  et  $M$  définies précédemment.  $\Delta F(x)$  est une incertitude sur la fonction vectorielle  $F(x)$  supposée bornée et  $\hat{F}(x)$  la fonction estimée de  $F(x)$ . De même  $b(x) = \hat{b}(x) + \Delta b(x)$ , avec  $\Delta b(x)$  une matrice d'incertitude sur la matrice  $b(x)$  constituée d'éléments  $\Delta b_{ij}$  bornés.  $\hat{b}(x)$  la matrice estimée de  $b(x)$ . Les erreurs d'estimation sur  $F(x)$  et  $b(x)$  sont supposées bornées telles que :

$$|F_i(x) - \hat{F}_i(x)| < G_i \quad \text{et} \quad |b_{ij}(x) - \hat{b}_{ij}(x)| < h_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m$$

avec :

$$G = [G_1, \dots, G_m]^T$$

et

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mm} \end{bmatrix}$$

**Proposition 1.1.** *Considérons le système (1.21) et la surface de glissement (1.22). Soit la loi de commande  $u$  appliquée au système définie par :*

$$u = -\hat{A}^{-1}(\hat{F}(x) + K(q)\text{sign}(s)) \quad (1.24)$$

Avec  $\hat{F}(x) = \hat{A}_1 \hat{f}_1 + \hat{A}_2 \hat{f}_2 + M$ , et  $N = [N_1, N_2, \dots, N_m]^T$ ,  $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$  deux vecteurs tels que :

$$N = G + H|u| = [N_1, \dots, N_m]^T \quad \text{et} \quad q_i > N_i$$

Avec la commande (1.24), chaque surface  $s_i$  converge en un temps fini  $T_r$  vers le domaine de glissement  $D_s$  tel que :

$$D_s = \{(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2) / \|s(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2)\| < \phi\}$$

$\phi$  est l'amplitude de la couche limite du domaine de glissement.

**Preuve :** Nous pouvons vérifier la convergence et la stabilité de la surface de glissement en appliquant le théorème de Lyapunov.

Soit la fonction :

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T s \quad (1.25)$$

La dérivée de cette fonction doit être négative pour que la surface de glissement converge vers zéro, c'est-à-dire :

$$\dot{V}(s) = s^T \dot{s} < 0 \quad (1.26)$$

Par dérivation de la surface de glissement(1.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial \dot{x}_2} \ddot{x}_2 + \frac{\partial s}{\partial \dot{x}_{2ref}} \ddot{x}_{2ref} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial s}{\partial x_{2ref}} \dot{x}_{2ref} \\ &= \frac{\partial s}{\partial \dot{x}_2} \left[ \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \Delta \dot{f}_2 + \dot{d} \right] + \frac{\partial s}{\partial x_2} \left[ \hat{f}_2 + \Delta f_2 + d \right] \frac{\partial s}{\partial \dot{x}_{2ref}} \ddot{x}_{2ref} + \frac{\partial s}{\partial x_{2ref}} \dot{x}_{2ref} \\ &= \hat{A}_1(\hat{f}_1 + \Delta f_1) + \hat{A}_2(\hat{f}_2 + \Delta f_2 + d) + A_3(\Delta \dot{f}_2 + \dot{d}) + M + \hat{A}u + \hat{A}_1 \Delta bu \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nous substituons la valeur de la commande donnée par l'expression (1.24), on trouve :

$$\dot{s} = \Delta F + \Delta Bu - K(q) \text{sign}(s) \quad (1.28)$$

avec  $\Delta B = \hat{A}_1 \Delta b$ . Une condition suffisante de convergence au sens de Lyapunov est :

$$\dot{V}(s) = s^T \dot{s} = s^T (A_1 \Delta f_1 + \hat{A}_2 (\Delta f_2 + d) + A_3 (\Delta \dot{f}_2 + \dot{d}) + \Delta Bu - K(q) \text{sign}(s)) < 0 \quad (1.29)$$

Il suffit de choisir la matrice  $K(q)$  telle que :

$$K(q) = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$$

avec  $q_i > N_i$ , où

$$N = G + H|u| = [N_1, \dots, N_m]^T$$

On remarque que malgré la présence d'erreurs de modélisation et des perturbations extérieures, la stabilité exponentielle est garantie et la surface converge vers zéro ( $s(\dot{\tilde{x}}_2, \tilde{x}_2) = 0$ ) et reste dans le domaine  $D_s$  tel que  $D_s = \{s(\dot{\tilde{x}}_2, \tilde{x}_2) / \|s(\dot{\tilde{x}}_2, \tilde{x}_2)\| < \phi\}$ ,  $\phi$  étant l'amplitude de la couche limite du domaine de glissement.

### 1.1.5 Conditions de convergence en temps fini (cas monovari- riable)

Les problèmes de la poursuite de  $x_d$  où le maintien de  $s$  à zéro du système (1.1), peuvent être résolus en considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (1.30)$$

La condition d'accès est donnée par :

$$\dot{V} = s\dot{s} < 0 \quad (1.31)$$

Pour garantir un temps d'accès fini, la dynamique de la surface de glissement sera spécifiée par la loi d'atteinte ( $\eta$ -attractivité) :

$$\dot{s} = -K_\eta \text{sign}(s) \quad (1.32)$$

On suppose que  $K_\eta > 0$ , alors :

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(-K_\eta \text{sign}(s)) = -K_\eta |s| \quad (1.33)$$

Soit  $T_r$ , le temps d'accès pour atteindre la surface  $s(x, t) = 0$ , et supposons qu'à  $t = 0$ ,  $s(x, t) > 0$ . La relation (1.33) peut alors se réécrire :

$$s\dot{s} \leq -K_\eta \quad (1.34)$$

Si nous faisons l'intégration de l'expression (1.34) entre le temps initial  $t = 0$  et le temps de convergence  $T_r$ , nous avons :

$$s(t = T_r) - s(t = 0) \leq -K_\eta(T_r - 0) \quad (1.35)$$

Sachant qu'à  $t = T_r$ ,  $s(x, t) = 0$  alors le temps  $T_r$  requis pour atteindre la surface, à partir d'une condition initiale quelconque  $s(t = 0)$ , est borné par :

$$T_r < \frac{|s(t = 0)|}{K_\eta} \quad (1.36)$$

## 1.2 Phénomène de broutement (chattering)

Dans la pratique, un régime glissant idéal n'existe pas car la fréquence de commutation des organes de commande a une limite finie. Autrement dit, il n'existe aucun organe de commutation pouvant commuter à une fréquence infinie (en effet cet organe devrait délivrer une énergie infinie).

Le caractère discontinu de la commande engendre un comportement dynamique particulier autour d'une couche limite de la surface de glissement qui est communément appelé chattering ou phénomène de réticence (figure 1.4). Cette oscillation au voisinage de la surface est due à l'imperfection des éléments de commutation ou des limites technologiques et physiques, telles que les retards au niveau des commutations ou des comportements avec hystérésis, qui peuvent exciter les dynamiques négligées (non modélisées) en haute fréquence.

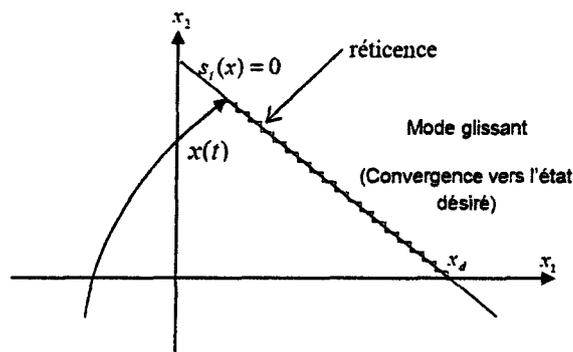


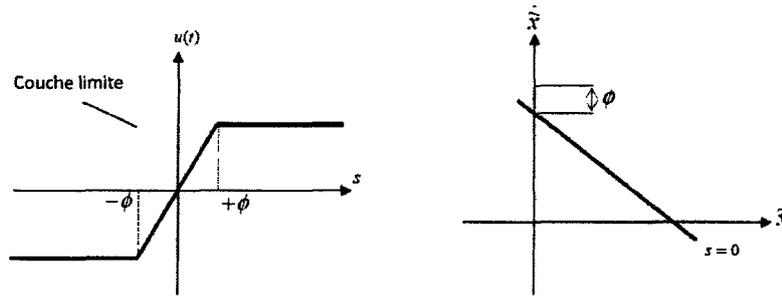
Figure 1.4 : Phénomène de réticence

Le chattering peut dégrader les performances du système et même conduire à l'instabilité [Hec91]. La réticence implique également d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs, augmentant la consommation énergétique qui peut endommager les circuits électriques de puissance.

### 1.2.1 Approximation continue de la commande par régime glissant

Le phénomène de réticence (broutement) est le principal inconvénient de la commande par mode de glissement d'ordre un. Pour remédier à ce problème de nombreux algo-

rithmes à structure variable ont été développés. On peut citer la commande continue dans une bande de la surface [SL91], la commande avec correction intégrale en régime permanent [SK02, SK05],[HHP86], l'utilisation d'un observateur pour estimer la commande équivalente [BBKU85] et les solutions par limitation de la condition de glissement [UGS99]. Parmi les nombreuses méthodes proposées pour résoudre le problème de broutement, nous allons étudier en particulier une méthode de synthèse où la fonction "signe" est remplacée par une fonction "sat" pour le calcul de la commande. Dans cette section



**Figure 1.5 :** Fonction de saturation et couche limite autour de la droite de glissement

nous allons décrire les différentes fonctions d'adoucissement de la commande telles que la fonction saturation (figure 1.5), la fonction  $Com_{sin}$  et les fonctions sigmoïdes, définies ci-dessous.

**Définition 1.1.** [Slo84] Cette fonction consiste à substituer à la commutation une droite de pente  $\frac{s}{\phi}$  dans la couche interne de la surface de discontinuité que nous appelons "couche limite" (figure 1.6). L'expression de cette fonction est donnée par :

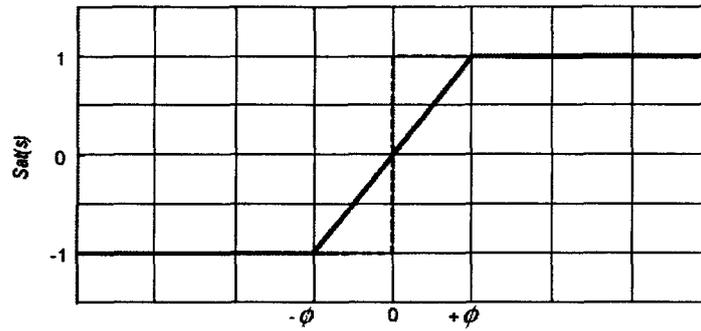
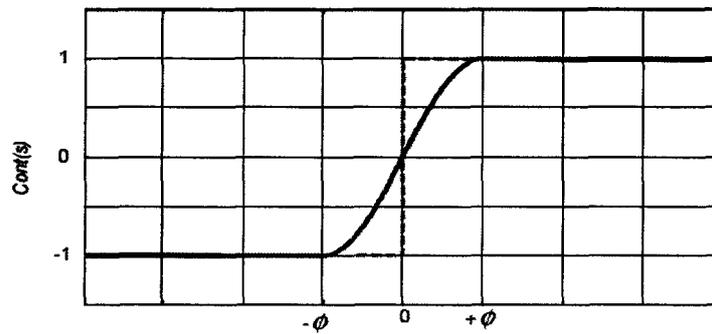
$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\|s\|} & si \|s\| \geq \phi \\ \frac{s}{\phi} & si \|s\| < \phi \end{cases} \quad (1.37)$$

$\phi$  est l'épaisseur de la couche limite,  $\phi > 0$ .

**Définition 1.2.** Une autre solution proposée pour lisser la commande au voisinage de la surface de commutation est de remplacer la fonction sign par une fonction continue "com<sub>sin</sub>" (figure 1.7), de la forme :

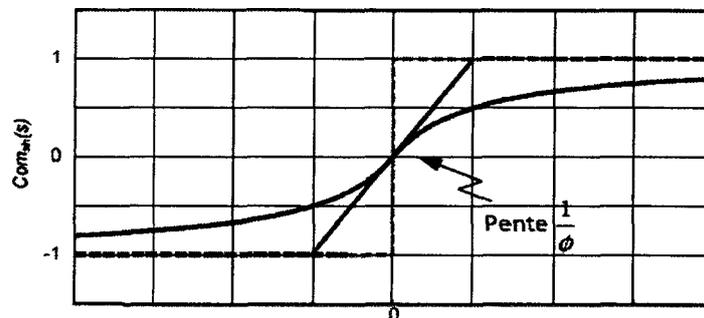
$$com_{sin}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\|s\|} & si \|s\| \geq \phi \\ \sin\left(\frac{\pi s}{2\phi}\right) & si \|s\| < \phi \end{cases} \quad (1.38)$$

avec  $\phi$  est l'épaisseur de la couche limite,  $\phi > 0$ .

Figure 1.6 : Fonction de saturation  $Sat$ Figure 1.7 : Fonction d'adoucissement  $Com\ sin$ 

**Définition 1.3.** La fonction proposée par [HYYH88] consiste à remplacer la commutation sign par une fonction continue à l'intérieur de la couche limite (figure 1.8) donnée par :

$$cont(s) = \frac{s}{\|s\| + \phi} \quad (1.39)$$

Figure 1.8 : Fonction d'adoucissement  $Cont(s)$ 

**Définition 1.4.** La fonction  $com_{arc}$  (figure 1.9) substitue la commutation par la fonction

arctangente définie par :

$$Com_{arc}(s) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{s}{\phi} \right) \quad (1.40)$$

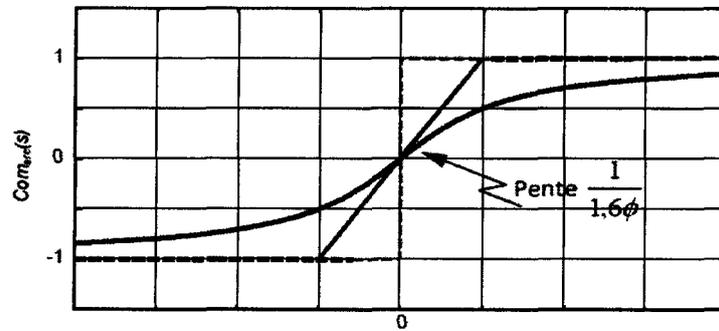


Figure 1.9 : Fonction d'adoucissement  $Com_{arc}$

Le choix entre les différentes fonctions d'adoucissement précédentes n'est pas évident. On remarque cependant qu'il y a une grande analogie entre les deux premières fonctions et les deux dernières.

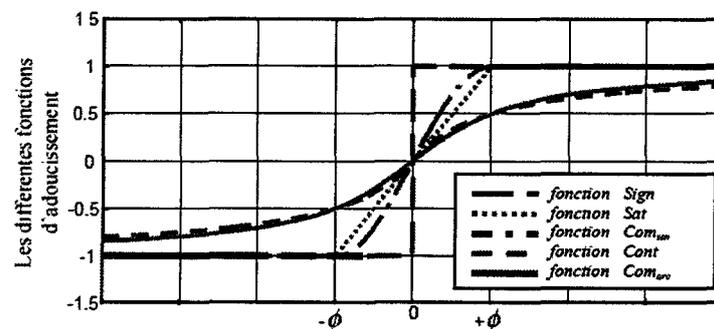


Figure 1.10 : Les différentes fonctions d'adoucissement

### Remarques 1.1.

1. Les fonctions  $sat(s)$  et  $com_{sin}(s)$  sont toutes deux exactement égales à la commutation  $sign(s)$  à l'extérieur de la couche limite  $\phi$ . Par conséquent, ceci rend l'analyse vis à vis des erreurs de perturbation plus facile car on connaît d'une manière précise la frontière à partir de laquelle la commutation  $sign(s)$  n'est plus utilisée. Ceci n'est pas le cas des deux autres fonctions  $cont(s)$  et  $com_{arctg}(s)$ , pour lesquelles le choix de  $\phi$  n'est pas simple.

2. Dans un cas idéal, la substitution de la fonction  $\text{sign}$  par l'une des fonctions de lissage ne change rien quant à "l'atteignabilité" de la surface de glissement  $s = 0$ , car la condition  $s\dot{s} < 0$  reste toujours valable. En présence d'erreurs de modèle et de perturbations, on ne pourra assurer que  $s < \phi$  et des erreurs de suivi en découleront.
3. Par la suite, nous préférons utiliser la fonction  $\text{sat}(s)$  qui est linéaire à l'intérieur de  $\phi$  et qui rend l'analyse du comportement de  $s(t)$  à l'intérieur de la couche limite  $\phi$  plus facile.

### 1.2.2 Comportement à l'intérieur de la couche limite

Dans cette section, nous proposons dans un premier temps la commande avec la fonction "sat" dont la couche limite est variable. Ceci constitue une première approche pour diminuer le chattering. Ensuite nous présenterons les intérêts de la commande avec un intégrateur à l'intérieur de la couche limite pour annuler l'erreur statique produite par les incertitudes paramétriques et les perturbations extérieures. Ces deux approches nous amèneront à résoudre le problème standard proposé dans de nombreuses publications concernant la robustesse de la commande. Considérons le système dynamique représenté sous sa forme canonique commandable suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
 \dot{x}_n(t) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + b(x_1, x_2, \dots, x_n, t)u + d(t) \\
 y(t) &= x_1
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

avec  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  est l'entrée de commande. Supposons que :

$$\begin{aligned}
 \Delta b(x, t) &= |b(x, t) - \hat{b}(x, t)| \leq H(x, t) \\
 \Delta f(x, t) &= |f(x, t) - \hat{f}(x, t)| \leq G(x, t) \\
 |d(t)| &< D
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

$\hat{f}(x, t)$  et  $\hat{b}(x, t)$  sont les fonctions estimées de  $f(x, t)$  et  $b(x, t)$  avec  $\hat{b}(x, t) \neq 0$ .  $\Delta f(x, t)$  et  $\Delta b(x, t)$  sont des incertitudes paramétriques bornées,  $d(t)$  et sa dérivée par rapport au temps sont bornées.

Notons  $X_d = [x_{1d}(t), x_{2d}(t), \dots, x_{nd}(t)]^T = [x_d(t), \dot{x}_d(t), \dots, x_d^{(n-1)}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  les consignes désirées du système.

La surface de commutation est définie par :

$$s(x) = e_n + c_{n-1}e_{n-1} + \dots + c_1e_1 = \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad \text{avec} \quad c_n = 1 \quad (1.43)$$

$c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  sont des coefficients qui assurent la stabilité asymptotique du système. Ils sont choisis de telle manière à ce que le polynôme  $P(p) = c_1 + c_2p + \dots + p^{(n-1)}$  soit un polynôme de Hurwitz.  $E_1 = [e_1, \dot{e}_1, \dots, e_1^{(n-1)}]$  est le vecteur d'erreurs de suivi dont les éléments sont définis par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= x_1(t) - x_{1d}(t) \\ e_2(t) &= x_2(t) - x_{2d}(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_{1d}(t) \\ &\vdots \\ e_n(t) &= x_n(t) - x_{nd}(t) = e_1^{(n-1)}(t) = x_1^{(n-1)}(t) - x_{1d}^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (1.44)$$

**Théorème 1.2.** *Considérons le système (1.41) et la surface de glissement (1.43). Supposons que les incertitudes paramétriques et les perturbations extérieures soient bornées, alors la loi de commande assurant la stabilité asymptotique est donnée par :*

$$u = u_{eq} + u_n \quad (1.45)$$

avec :

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{b}(x, t)} \psi \quad u_n = -\frac{K}{\hat{b}(x, t)} \text{sign}(s) \quad (1.46)$$

où  $K$  satisfait la condition :

$$K > \frac{H}{|\hat{b}| - H} |\psi| + \frac{|\hat{b}|}{|\hat{b}| - H} (G + D + \eta) \quad (1.47)$$

avec :

$$\psi = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) + x_{1d}^{(n)} - \hat{f}(x, t) \quad (1.48)$$

Ainsi, les erreurs de suivi  $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$  convergent asymptotiquement vers zéro.

**Preuve :**

La commande équivalente est déduite de la surface de glissement en imposant  $\dot{s} = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{s}(x) &= \sum_{i=1}^n c_i \dot{e}_i(t) \\
&= \dot{e}_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) \\
&= f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + b(x_1, x_2, \dots, x_n, t)u(t) \\
&\quad + d(t) - x_{1d}^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) \\
&= \hat{f}(x, t) + \Delta f(x, t) + \left( \hat{b}(x, t) + \Delta b(x, t) \right) u(t) \\
&\quad + d(t) - x_{1d}^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) = 0
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Substituons la dernière égalité du système (1.41) dans la dérivée de la surface de glissement (1.49). Il en résulte que :

$$\hat{f}(x, t) + \hat{b}(x, t)u_{eq} - x_{1d}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) = 0 \tag{1.50}$$

Ainsi, la loi de la commande équivalente peut être obtenue par :

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{b}(x, t)} \left[ - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \left( x_1^{(i)} - x_{1d}^{(i)} \right) - \hat{f}(x, t) + x_{1d}^{(n)} \right] \tag{1.51}$$

En choisissant la fonction candidate de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$ , la condition d'atteinte est obtenue par :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \dot{s} \leq -\eta |s(x)|, s \neq 0 \tag{1.52}$$

où  $\eta$  est une constante strictement positive.

Pour satisfaire la condition (1.52) et assurer que l'erreur d'état converge asymptotiquement vers 0, la commande équivalente est augmentée par une loi de commande discontinue  $u_n$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \hat{f}(x, t) + \Delta f(x, t) + \left( \hat{b}(x, t) + \Delta b(x, t) \right) (u_{eq} + u_n) \\
&\quad + d(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) - x_{1d}^{(n)}(t)
\end{aligned} \tag{1.53}$$

La dynamique réelle de la surface obtenue en commandant le système perturbé (1.41) avec  $u = u_{eq} - K \hat{b}^{-1}(x, t) \text{sign}(s)$  est alors exprimée par :

$$\dot{s} = \frac{\Delta b(x, t)}{\hat{b}(x, t)} \left( - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) + x_{1d}^{(n)}(t) - \hat{f}(x, t) \right) + \Delta f(x, t) + d(t) - \mu K \text{sign}(s) \tag{1.54}$$

avec :

$$\mu = 1 + \frac{\Delta b(x, t)}{\hat{b}(x, t)}$$

En utilisant les relations (1.54) et (1.52) nous pouvons récrire  $\dot{V}$  :

$$\dot{V} = s \left[ \Delta f + \Delta b \hat{b}^{-1} \left( - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) + x_1^n(t) - \hat{f} \right) - (\hat{b} + \Delta b) \hat{b}^{-1} K \text{sign}(s) + d(t) \right] \leq -\eta |s| \quad (1.55)$$

En posant :

$$\psi = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) + x_{1d}^{(n)}(t) - \hat{f}$$

L'équation (1.55) devient :

$$\dot{V} = s \left( \Delta f + \Delta b \hat{b}^{-1} \psi - (\hat{b} + \Delta b) \hat{b}^{-1} K \text{sign}(s) + d(t) \right) \leq -\eta |s| \quad (1.56)$$

La condition (1.52) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} K &\geq (\hat{b} + \Delta b)^{-1} \hat{b} \left( |\Delta b \hat{b}^{-1} \psi + \Delta f + |d| + \eta \right) \\ &> \frac{\Delta b}{\hat{b} + \Delta b} |\psi| + \frac{\hat{b}}{\hat{b} + \Delta b} (|\Delta f| + |d| + \eta) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Rappelons que  $|\Delta f| \leq G$ ,  $|\Delta b| \leq H$  et sous la condition (1.52), nous pouvons finalement obtenir la condition suffisante de la convergence asymptotique :

$$\begin{aligned} K &> \frac{\Delta b}{\hat{b} + \Delta b} |\psi| + \frac{\hat{b}}{\hat{b} + \Delta b} (G + D + \eta) \\ &> \frac{H}{|\hat{b}| - H} |\psi| + \frac{|\hat{b}|}{|\hat{b}| - H} (G + D + \eta) \end{aligned} \quad (1.58)$$

alors  $s\dot{s} < 0$ , par conséquent le mode glissant existe.

### 1.2.3 Couche limite variable

La commande continue est conçue pour rendre la couche limite attractive, de façon à ce que les trajectoires démarrant de la couche limite soient attirées vers cette région en un temps fini. Bien que le phénomène de broutement puisse être diminué si la couche limite est choisie assez grande, l'erreur de suivi de trajectoire augmente si la bande de fréquence de commande est limitée.

Dans le but d'obtenir un suivi de trajectoire de haute précision, une couche limite fine est nécessaire. Toutefois, elle risque d'exciter la commande à haute fréquence. Pour arriver à un meilleur compromis entre un minimum de broutement et une bonne précision de suivi de trajectoire en présence des incertitudes paramétriques, différentes stratégies de compensations ont été proposées. Parmi elles, on peut citer la commande par mode de glissement avec intégrateur [FWH97, FY98], [CW91], celle en utilisant les couches limites [Hwa96], [SL91] et la commande par mode de glissement complémentaire [CSR02], [Su01]. Dans cette partie, une stratégie de commande par mode de glissement basée sur la variation de la couche limite est proposée. Ce contrôleur permet à la fois de diminuer le broutement et d'obtenir un suivi de trajectoire de haute précision. Pour démontrer la validité de l'approche proposée, un exemple de simulation sera traité en détail à la fin de ce paragraphe. La loi de commande est donnée par :

$$u_n = \begin{cases} -\frac{K}{b(x,t)} \frac{s}{|s|} & \text{si } |s| > \phi \text{ avec } e_1 \neq 0 \\ -\frac{K}{b(x,t)} \frac{s}{\phi_1 \lambda(e_1) + \phi_2 (1 - \lambda(e_1))} & \text{si } |s| \leq \phi \text{ avec } e_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_1 = 0 \end{cases} \quad (1.59)$$

avec  $\phi = \phi_1 \lambda(e_1) + \phi_2 (1 - \lambda(e_1))$ , où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont des couches limites différentes, vérifiant  $0 < \phi_2 < \phi_1$  et  $\lambda(e_1) = 1$  pour  $|e_1| > e_0$ ,  $\lambda(e_1) = 0$  pour  $|e_1| \leq e_0$ ,  $e_0$  étant une constante positive.

Par conséquent, si l'état initial est à l'extérieur de la couche limite,  $|s| \geq \phi$ , il sera attiré à la couche limite de la surface de glissement. En outre, si la valeur absolue de l'erreur de suivie de trajectoire est plus petite que  $e_0$ , la couche limite est remplacée par  $\phi_2 < \phi_1$  de façon à ce que l'erreur de suivi ainsi que le phénomène de broutement soient atténuées de façon significative. Par conséquent, la région délimitée par l'épaisseur  $\phi$  autour de la surface est attractive.

**Lemme 1.1.** [MM07] *Considérons le système (1.41), l'expression de la commande (1.45), (1.59) et la surface (1.43). Si les incertitudes paramétriques et les perturbations extérieures sont bornées, pour tout  $t > T_r$ , où  $T_r$  est le temps de convergence vers la région  $s = \phi$  et si  $0 < \mu_m < \mu < \mu_M$ , alors la surface  $s$  est bornée à l'intérieur de la couche limite  $|s(t)| < \phi$ .*

**Preuve :**

À  $T_r = \frac{|s(0)| - \phi}{K}$ , les trajectoires de phase franchissent la frontière de la couche limite. À cet instant la fonction discontinue  $\text{sign}(s)$  est remplacée par la fonction  $\frac{s}{\phi}$ , nous avons alors :

$$\dot{s} = \frac{\Delta b(x, t)}{\hat{b}(x, t)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) - x_{1d}^{(n)}(t) - \hat{f}(x, t) \right) + \Delta f(x, t) + d(t) - \mu K \frac{s(t)}{\phi} \quad (1.60)$$

Si la surface  $s > \phi$  alors la convergence des trajectoires de phase est garantie pour atteindre la région  $|s| < \phi$  par la condition  $s\dot{s} < 0$ . Une fois que la surface entre dans la couche limitée  $\phi$ , la commande change de structure. La fonction discontinue définie par  $\text{sign}(s)$  devient  $\frac{s}{\phi}$ , donc à l'intérieur de la couche limite  $s < \phi$ , nous avons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\phi}{K\mu} \dot{s}(t) = \varepsilon(t) - s(t) \quad (1.61)$$

avec

$$\varepsilon(t) = \frac{\phi}{K\mu} \left( \frac{\Delta b(x, t)}{\hat{b}(x, t)} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) - x_{1d}^{(n)}(t) - \hat{f}(x, t) \right] + \Delta f(x, t) + d(t) \right) \quad (1.62)$$

C'est une équation du premier ordre avec second membre, dont la solution de l'équation (1.61) est donnée comme suit pour  $t > T_r$  :

$$s(t) = e^{-\mu \frac{K}{\phi} t} \int_{t_r}^t \frac{\mu K}{\phi} \varepsilon(\tau) e^{\mu \frac{K}{\phi} \tau} d\tau \quad (1.63)$$

De l'équation (1.60) et (1.62), nous avons  $-\phi \frac{\xi}{K} \leq \varepsilon(t) \leq \phi \frac{\xi}{K}$ , avec :

$$\xi = \frac{H}{|\hat{b}| - H} \psi_{\max} + \frac{|\hat{b}|}{|\hat{b}| - H} (G + D + \eta) \quad (1.64)$$

Donc :

$$s_m(t) \leq s(t) \leq s_M(t) \quad (1.65)$$

avec :

$$s_m(t) = -e^{-\mu_M \frac{K}{\phi} t} \int_{t_r}^t \mu_M \xi e^{\mu_M \frac{K}{\phi} \tau} d\tau \quad (1.66)$$

$$s_M(t) = e^{-\mu_m \frac{K}{\phi} t} \int_{t_r}^t \mu_m \xi e^{\mu_m \frac{K}{\phi} \tau} d\tau \quad (1.67)$$

Dans le cas,  $s(T_r) > 0$ , nous avons :

$$s_m(t) = -\phi \left( \frac{\xi}{K} - \left( 1 + \frac{\xi}{K} \right) e^{-\mu_m \frac{K}{\phi} (t-T_r)} \right) \quad (1.68)$$

$$s_M(t) = \phi \left( \frac{\xi}{K} + \left( 1 - \frac{\xi}{K} \right) e^{-\mu_m \frac{K}{\phi} (t-T_r)} \right) \quad (1.69)$$

Donc :

$$-\phi < s(t) < \phi \quad (1.70)$$

Et de  $s(T_r) < 0$ , on obtient :

$$s_m(t) = -\phi \left( \frac{\xi}{K} + \left( 1 - \frac{\xi}{K} \right) e^{-\mu_m \frac{K}{\phi} (t-T_r)} \right) \quad (1.71)$$

$$s_M(t) = \phi \left( \frac{\xi}{K} - \left( 1 + \frac{\xi}{K} \right) e^{-\mu_m \frac{K}{\phi} (t-T_r)} \right) \quad (1.72)$$

Donc :

$$-\phi < s(t) < \phi \quad (1.73)$$

Donc, dans tous les cas :

$$|s(t)| < \phi \quad (1.74)$$

En conclusion, la surface  $s$  est bien bornée à l'intérieur de la couche limite, d'où la démonstration du lemme 1.1.

Si la dynamique de  $\varepsilon(t)$  est supposée négligeable par rapport à la dynamique du système alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_n \quad (1.75)$$

Par conséquent, nous avons une erreur créée par  $\varepsilon(t)$  :

$$e_1(t) = \frac{\varepsilon_n}{c_0} \leq \frac{\xi}{c_0 \mu K} \phi \quad (1.76)$$

avec  $c_0$  une constante positive.

#### 1.2.4 Introduction de l'action intégrale

Dans le but de compenser l'erreur en régime permanent, on peut ajouter un terme intégral dans la surface de glissement [HYYH88], [EA05] et [SK02, SK05]. Ce perfectionnement (à l'instar d'autres) est introduit a priori et justifié par des essais sur des

systèmes particuliers. Notre objectif dans ce paragraphe est de concevoir une nouvelle approche basée sur la théorie de la commande à structure variable, en introduisant un correcteur de type intégrateur sans toutefois perdre les propriétés de la CMG. Nous supposons que la dynamique de  $\varepsilon(t)$  est négligeable par rapport à la dynamique du système [MCAPB06].

Dans ce qui suit, afin d'étudier la robustesse des méthodes de commande fondées sur l'utilisation des fonctions d'adoucissement vis-à-vis des incertitudes paramétriques, nous étudions le cas de la deuxième solution proposée. Cette solution consiste à introduire un intégrateur à l'intérieur de la couche limite pour éliminer l'erreur.

$$u = u_{eq} + u_c + u_r \quad (1.77)$$

avec  $u_{eq}$  et  $u_c$  définies par (1.51) et (1.59) respectivement,  $u_r$  est donnée par :

$$u_r = \begin{cases} -K_r \int (x_1(t) - x_{1d}(t)) & \text{si } |e_1(t)| \leq e_0 \\ 0 & \text{si } |e_1(t)| > e_0 \end{cases} \quad (1.78)$$

avec :  $K_r$  la constante intégrale et  $e_1 = x_1 - x_{1d}$ .  $e_0$  est une constante positive satisfaisant :

$$e_0 \geq \frac{\xi}{c_0 \mu K} \phi \quad (1.79)$$

### 1.3 Exemple de simulation

Afin de tester les différents algorithmes présentés, considérons l'exemple décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f + bu + d \end{cases} \quad (1.80)$$

avec  $f = a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1$ . Supposons que dans le cas nominal  $\hat{f} = x_1 x_2 - x_1$  et que l'erreur d'estimation sur  $f$  est supposée bornée par une fonction connue  $G = G(x_1, \hat{x}_1)$  telle que :

$$|\hat{f} - f| \leq G \quad |d| < D$$

Les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $b$  sont des inconnus qui vérifient :  $0.5 \leq a_1 \leq 1.5$ ,  $-1.5 \leq a_2 \leq -0.5$  et  $0.8 \leq b \leq 1.2$ , respectivement.  $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}) = (1, -1, 1)$ ,  $d = 0$  sont les paramètres dans le cas nominal. On considère la surface de glissement donnée par la fonction suivante :

$$s = \dot{e}_1 + c_1 e_1 \quad (1.81)$$

avec  $e_1 = x_1 - x_{1d}$ , où  $x_{1d}$  représente la sortie désirée.

Par dérivation de cette surface (1.81), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= f + bu + d(t) - \ddot{x}_{1d} + c_1\dot{e}_1 \\ &= \Delta f + \Delta bu + d(t) + \hat{f} + \hat{b}u - \ddot{x}_{1d} + c_1\dot{e}_1\end{aligned}\quad (1.82)$$

La meilleure approximation de la commande équivalente  $\hat{u}$  calculée à partir de  $\dot{s} = 0$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{u}_{eq} &= \frac{1}{\hat{b}}[-\hat{f} + \ddot{x}_{1d} - c_1\dot{e}_1] \\ &= -x_1x_2 + x_2 + \ddot{x}_{1d} - c_1\dot{e}_1\end{aligned}\quad (1.83)$$

Pour satisfaire la condition (1.52) et assurer que l'erreur d'état converge asymptotiquement vers 0, la commande équivalente est augmentée par une loi de commande discontinue  $u_n = -k \text{sign}(s)$  :

$$u = \hat{u}_{eq} - k \text{sign}(s) \quad (1.84)$$

En choisissant  $k = k(x_1, \dot{x}_1)$  assez grand, la condition (1.52) peut être satisfaite à tout moment :

$$\begin{aligned}\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s\dot{s} \\ &= s \left[ \hat{f} + \Delta f + (1 + \Delta b)u + d - \ddot{x}_{1d} + c_1\dot{e}_1 \right] \\ &= s \left[ \Delta f + d + \Delta b(-\hat{f} + \ddot{x}_{1d} - c_1\dot{e}_1) \right] - (1 + \Delta b)K|s| \leq -\eta|s|\end{aligned}\quad (1.85)$$

La condition d'attractivité de la surface  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s|$  (1.52) est vérifiée si :

$$k \geq 0.875|x_1x_2| + 0.375|x_2| + 0.5u_{max} + D + \eta$$

Les résultats de simulation ont été obtenus en choisissant  $c_1 = 2$ ,  $k = 3.5$  et  $\phi = 0.1$ . La figure 1.11 montre la commande chahutée obtenue avec la loi de commande discontinue (1.84). La figure 1.12 montre l'évolution de la commande avec la fonction *sat*, nous remarquons que la commande est douce. Les résultats de simulation des figures 1.13(a) et 1.13(b), ont été obtenus avec la variation de la couche limite 1.59 en choisissant  $\phi_1 = 0.1$ ,  $\phi_2 = 0.01$ ,  $\lambda(e_1) = 1$  pour  $|e_1| > 0.01$ ,  $\lambda(e_1) = 0$  pour  $|e_1| \leq 0.01$  et  $K_r = 100$ . Nous constatons que dans le cas nominal, nous n'avons pas d'erreur (figure 1.13(a)), ce qui n'est pas le cas quand le système est incertain (figure 1.13(b)). Dans la figure 1.13(b),

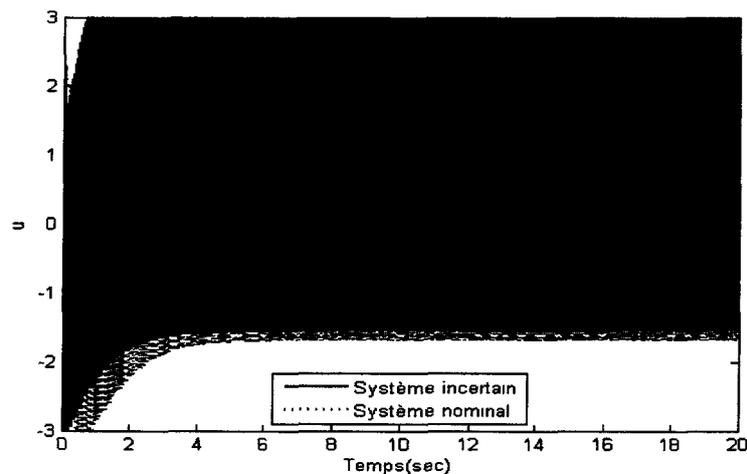


Figure 1.11 : La loi de commande par mode de glissement avec la fonction *Sign*.

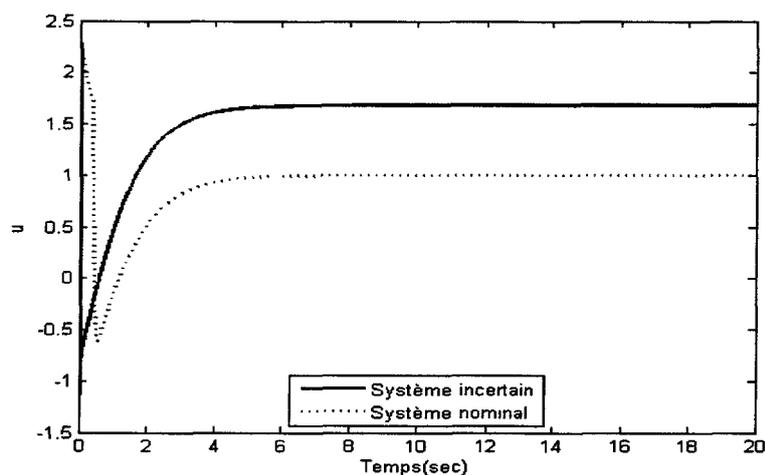


Figure 1.12 : La loi de commande par mode de glissement avec la fonction *Sat*.

on constate que l'erreur de suivi en utilisant la nouvelle approche est de 0.0009 (avec  $\phi_1 = 0.1$  et  $\phi_2 = 0.01$ ). En même temps, l'erreur de suivi pour la commande par mode de glissement avec la fonction *sat* standard (couche limite constante) s'élève à 0.009, ce qui est évidemment beaucoup plus grand. La même figure 1.13(b) montre l'élimination de l'erreur par l'addition d'un nouveau terme à la commande d'entrée (compensation de l'erreur).

Ces résultats de simulation montrent que la stratégie de commande proposée est robuste face aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures.

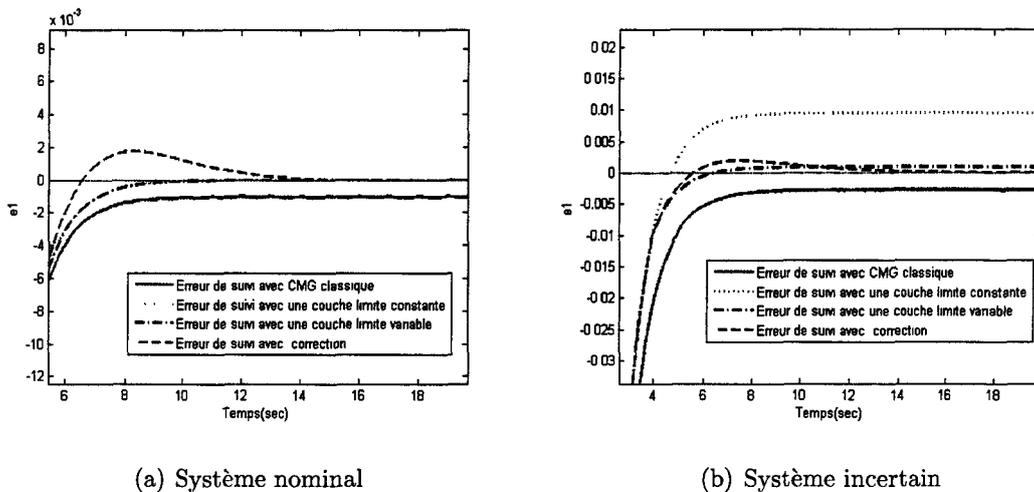


Figure 1.13 : Erreurs statiques pour différentes stratégies de commande

## 1.4 Présentation du banc d'essai

La commande non linéaire est appliquée à un système hydraulique comme illustré par la figure 1.14. Ce procédé peut être dédié à divers traitements : les eaux, d'autres liquides, ..., où des réactions chimiques sont supposées apparaître à différents points de fonctionnement. Afin de valider nos stratégies de commande présentées précédemment, nous avons utilisé un banc d'essai du Laboratoire (LTI) de l'université de Picardie Jules Verne. Il s'agit d'un système hydraulique à trois cuves comme le montre la figure 1.14 comportant :

- trois cuves  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  de 9.2 litres chacune,
- un capteur de niveau par colonne,
- un PC muni d'une carte d'acquisition Dspace DS1102,
- un "actuateur" pré-actionneur.

### 1.4.0.1 Description du banc d'essai

La maquette est constituée de 3 colonnes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , de hauteur maximale  $h_{max}$ , de section  $A$ , couplées par des vannes de transfert et qui peuvent être vidangées dans une cuve de rétention par des vannes de fuite. Ces vannes de fuite et de transfert notées  $V_{a_{21}}$ ,  $V_{a_{23}}$  et  $V_{b_{24}}$  ont des sections efficaces identiques  $S_n$ . Deux soupapes rotatives peuvent être utilisées pour changer la section du canal et par conséquent changer les caractéristiques

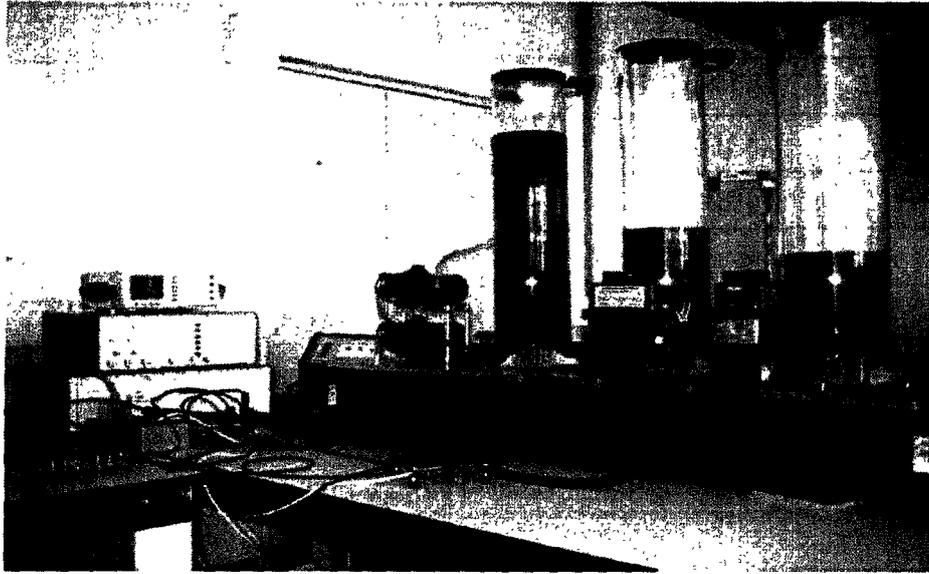


Figure 1.14 : Système réel

d'écoulement entre les colonnes. Ces deux soupapes ont des coefficients de conduite  $a_{z1}$  et  $a_{z3}$ . Chaque cuve a une conduite supplémentaire qui peut être utilisée comme perturbation par l'intermédiaire d'une valve  $V_{bzi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ajustable manuellement.

Les cuves 1 et 2 sont alimentées en fluide par l'intermédiaire de 2 pompes de débit maximal  $Q_{max}$ . Ces pompes à vitesse variable sont utilisées pour pomper de l'eau dans le réservoir et la rejeter dans les colonnes situées en partie supérieure du réservoir. La vitesse d'une pompe peut être ajustée pour remplir un réservoir à gauche ou à droite, à un niveau exigé, sous contrôle manuel ou automatique. Le débit maximal de la pompe ( $117ml/s$ ) est atteint quand une tension de 10 volts est appliquée à la pompe et le débit est nul à -10 volt. Chaque colonne est équipée d'un capteur de pression donnant le niveau du liquide dans le réservoir. Les capteurs sont calibrés pour fournir des signaux de sortie variant de +10 volts à -10 volts correspondant à une variation de niveau d'eau de  $0mm$  à  $600mm$  pour chaque colonne. Le système expérimental est équipé de capteurs et d'actionneurs qui communiquent via une carte d'acquisition (DAC6214) et un ordinateur.

Deux convertisseurs D/A avec une gamme de tensions comprises entre -10 et +10V, sont utilisées pour commander les pompes. Le plus grand débit de la pompe  $i$  est noté  $Q_{imax}$  (voir Tableau 1.2). La fréquence d'échantillonnage utilisée est de  $1kHz$ .

Symbole	Valeurs	Paramètres
A	$0.0154m^2$	Section de cuve
$S_n$	$5.10^{-5}m^2$	Section des vannes de connexion
$S_L$	$5.10^{-5}m^2$	Section des vannes de fuite
$a_{zi}$	$0 < a_z \leq 1.7$	Coefficient de conduite entre les colonnes
$b_{zi}$	$0 < b_z \leq 1.2$	Coefficient de conduite de fuite
$g$	$9.81ms^{-2}$	Constante de gravitation
$h_{max}$	0.6m	Hauteur maximum de l'eau dans les cuves
$Q_{imax}$	$1.17.10^{-4}m^3/s$	Débit maximum de la pompe $i(i = 1; 2)$

Table 1.2 : Paramètres de la maquette à trois cuves

#### 1.4.0.2 Carte d'acquisition

La carte utilisée est une DS1102 commercialisée par la société "dSpace". Elle convient parfaitement au prototypage de lois de commande. Elle est connectée via le bus ISA d'un PC. Cette liaison permet le téléchargement de codes exécutables pour le DSP depuis le PC siège de la compilation. Le lien par le bus ISA est également mis à profit pour permettre un dialogue de haut niveau en temps réel entre le DSP et les outils de supervision installés (logiciel Control Desk dans le cadre de notre étude) sur le PC. Le processeur est entièrement programmable à partir d'un langage de type schémas blocs (Simulink) grâce à l'interface software RTI (Real Time Interface) et RTW (Real Time Workshop).

#### 1.4.0.3 Les capteurs

Les mesures des niveaux sont effectuées par des capteurs de pression par différence de piezo-résistivité. Un tuyau rempli d'air est fixé sur toute la hauteur de la colonne. Son extrémité haute est bouchée par le capteur de pression, et l'extrémité basse est fixée dans le bas de la colonne, le poids de l'eau dans la colonne fait donc pression sur le capteur qui détermine une hauteur d'eau via une résistance.

#### 1.4.0.4 L'actionneur

L'actionneur permet :

- d'appliquer aux 2 pompes des tensions variables de -10 à +10 Volts, correspondant respectivement à un débit variant de 0 à  $Q_{max}$ ,
- de mesurer les tensions issues des 3 capteurs variables de +10 à -10 Volts, correspondant respectivement à une hauteur de 0m à  $h_{max}$  (environ 0.6 m).

Notons que sur la face avant de l'actionneur, 2 potentiomètres permettent de commander manuellement les 2 pompes à condition que les interrupteurs associés soient placés en mode manuel. Les différents signaux de mesure ou de commande transitent entre le PC et le système de contrôle par l'intermédiaire d'une carte de connexion.

### 1.4.1 Modélisation

Considérons maintenant le système comprenant trois cuves et représenté sur la figure 1.15.

Les équations d'état sont obtenues en écrivant que la variation du volume d'eau dans

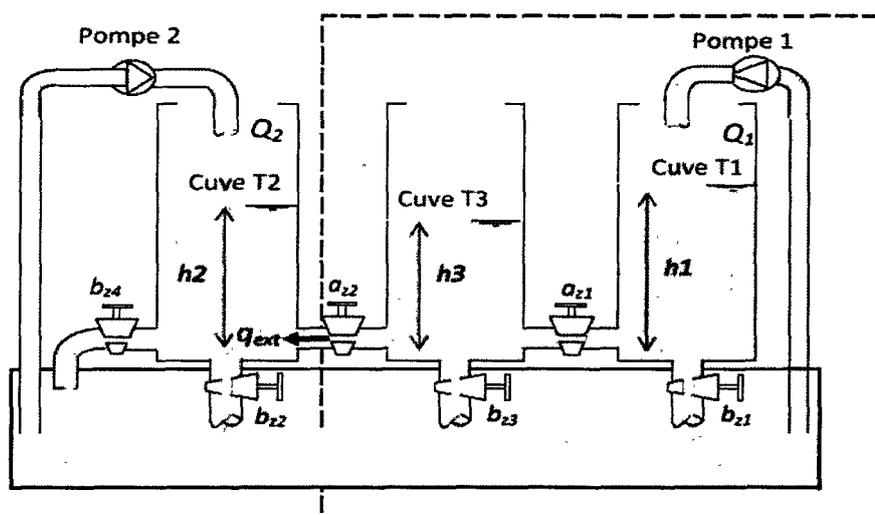


Figure 1.15 : Système constitué de trois cuves contenant de l'eau et reliées par deux canaux

un bac est égale à la somme des débits entrants moins la somme des débits sortants, c'est-à-dire, l'eau des bacs 1 et 3 peut se déverser vers le bac 2, mais aussi vers le réservoir d'alimentation. En utilisant les équations massiques (équilibre des débits), le système peut être représenté par :

$$\dot{h}_i(t) = \frac{1}{A} (Q_i^{in}(t) - Q_{ij}^{out1}(t) - Q_{ij}^{out2}(t)) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.86)$$

où  $Q_{ij}^{out1}(t)$  représente le débit d'eau entre les cuves  $i$  et  $j$  ( $i, j = 1, 2, 3 \forall i \neq j$ ), et peut être exprimé en utilisant la loi de Torricelli [Oga78], voir annexe C :

$$Q_{ij}^{out1}(t) = a_{z\alpha} S_n \text{sign}(h_i - h_j) \sqrt{2g|h_i - h_j|}, \alpha = 1, 3 \quad (1.87)$$

et  $Q_{ij}^{out2}(t)$  représente le débit de sortie avec :

$$Q_{ij}^{out2}(t) = b_{z\beta} S_L \sqrt{2gh_i} \quad \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.88)$$

où  $h_i(t)$ ,  $Q_i^{in}(t)$  et  $Q_{ij}^{out}(t)$  sont respectivement les niveaux d'eau, le débit d'entrée et le débit de fuite. Le système des trois réservoirs peut être modélisé par le système de trois équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} - B_1 \sqrt{h_1} + \frac{Q_1}{A} \\ \frac{dh_2}{dt} &= -C_3 \text{sign}(h_3 - h_2) \sqrt{|h_3 - h_2|} - (B_4 + B_2) \sqrt{h_1} + \frac{Q_2}{A} \\ \frac{dh_3}{dt} &= C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} - B_3 \sqrt{h_3} - C_3 \text{sign}(h_3 - h_2) \sqrt{|h_3 - h_2|} \end{aligned} \quad (1.89)$$

avec  $C_\alpha$  et  $B_\beta$  des coefficients donnés respectivement par :

$$C_\alpha = \frac{1}{A} a_{z\alpha} S_n \sqrt{2g} \quad \alpha = 1, 3 \quad (1.90)$$

$$B_\beta = \frac{1}{A} b_{z\beta} S_L \sqrt{2g} \quad \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.91)$$

#### 1.4.1.1 Modèle dynamique du système à deux colonnes

Le système que nous voulons contrôler se compose de deux réservoirs  $T_1$  et  $T_3$  connecté comme indiqué sur la figure 1.15. Les valves  $a_{z3}$  et  $b_{z1}$  sont entièrement fermées pendant les expériences, la valve  $a_{z1}$  a été entièrement ouverte et la valve  $b_{z3}$  a été partiellement ouverte (on l'ouvre juste pour créer une perturbation). La position des valves n'a pas changé pendant les expériences. Le signal commandé ( $y$ ) est la hauteur du niveau de liquide dans le réservoir  $T_3$  du milieu ( $y = h_3$ ). Ce niveau est contrôlé par la tension de commande de la pompe  $P_1(u)$ . Le système peut être considéré comme système à une seule sortie et une seule entrée où l'entrée est le débit  $Q_1$  et la sortie est le niveau du liquide  $h_3$ , le système à deux colonnes peut être modélisé par les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dh_1}{dt} = -C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} + \frac{Q_1}{A} \quad (1.92)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} - B_3 \sqrt{h_3} \quad (1.93)$$

où les paramètres sont définis par :

$$C_1 = \frac{1}{A} a_{z_1} S_n \sqrt{2g} \quad (1.94)$$

$$B_3 = \frac{1}{A} b_{z_3} S_L \sqrt{2g} \quad (1.95)$$

#### 1.4.1.2 Les contraintes du système

Pour la maquette de colonnes couplées, le débit du fluide,  $Q_1$ , dans le réservoir 1, ne peut pas être négatif parce que la pompe ne peut que pomper l'eau dans le réservoir. Par conséquent, la contrainte sur le débit d'entrée est donnée par :

$$Q_1 \geq 0 \quad (1.96)$$

À l'équilibre, pour une consigne constante de niveau d'eau, les dérivées doivent être nulles :

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_3 = 0 \quad (1.97)$$

Par conséquent, utilisant les équations (1.92) et (1.93) dans l'état d'équilibre, la relation algébrique suivante devient :

$$\begin{aligned} -C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} + \frac{Q_1}{A} &= 0 \\ C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} - B_2 \sqrt{h_3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.98)$$

où  $Q_1$  est le débit d'entrée à l'état d'équilibre, donné par :

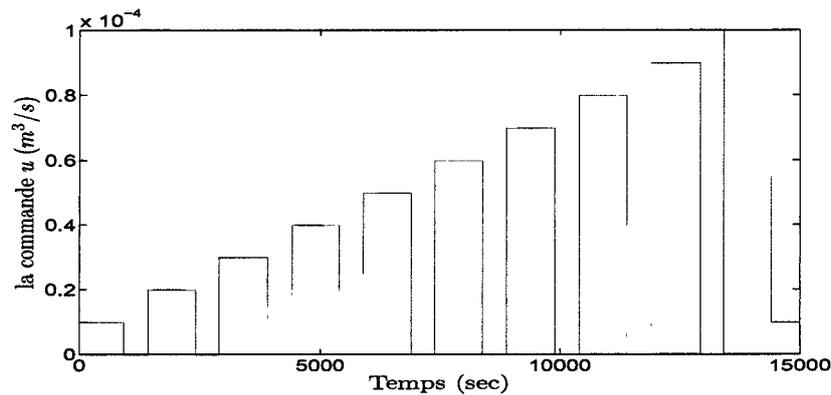
$$Q_1 = AC_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \sqrt{|h_1 - h_3|} \quad (1.99)$$

A partir de la relation (1.99), et pour satisfaire la contrainte (1.96) sur le débit d'entrée, nous devrions avoir  $C_1 \text{sign}(h_1 - h_3) \geq 0$ , ce qui implique :

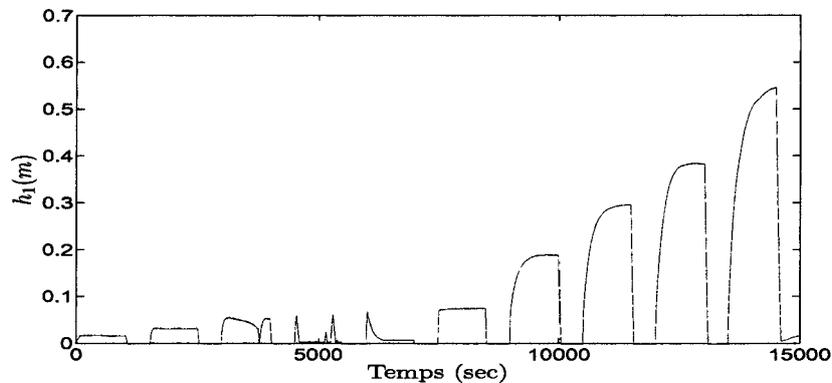
$$h_1 \geq h_3$$

#### 1.4.1.3 La forte non linéarité du système physique

Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de non linéarité du système physique. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux caractéristiques de la sortie



**Figure 1.16 :** Différentes entrées du système en boucle ouverte



**Figure 1.17 :** Réponse du système pour différents débits volumétriques d'entrée

en fonction de l'entrée, et aux variations des paramètres du système en boucle ouverte.

La commande et les trajectoires du système en boucle ouverte résultants des essais effectués sont illustrées respectivement par les figures 1.16 et 1.17. Ces trajectoires correspondent à la position de la vanne  $V_{b_{z1}} = 100\%$  (Vanne complètement ouverte).

Les courbes résultantes (figures 1.18 et 1.19) ont été déterminées par interpolation et elle sont sensiblement imprécises aux positions extrêmes de la vanne. Si ces courbes sont employées pour calculer les stratégies de commande basée sur le modèle du système, cette inexactitude peut conduire à des performances insuffisantes du système.

La figure 1.18 montre la relation entre le coefficient de section  $b_{z1}$  et la position de valve pour différents débits volumétriques d'entrée, comme déterminé expérimentalement. L'effet du débit d'eau sur les paramètres du système est montré sur les figures 1.20, 1.21 et 1.22.

Le système physique présente un comportement fortement non-linéaire en raison des ca-

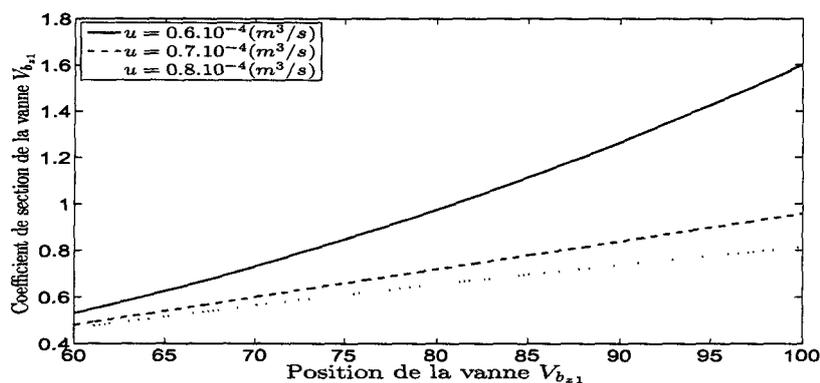


Figure 1.18 : Caractéristique du coefficient de section en fonction de la position de la vanne

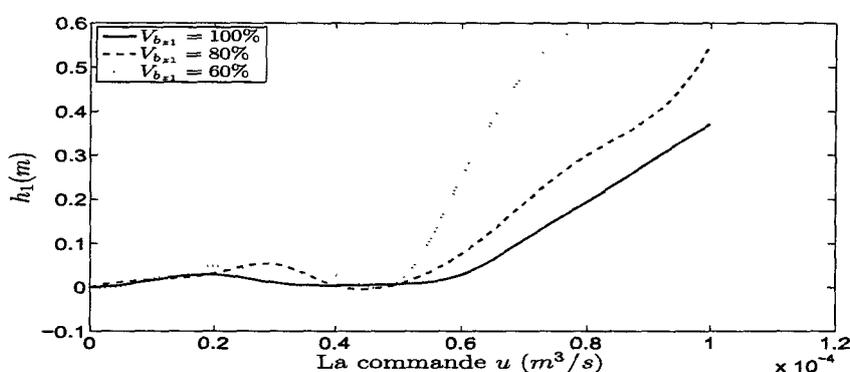


Figure 1.19 : Sortie du système en fonction des différents débits volumétriques d'entrée pour différentes positions de la vanne

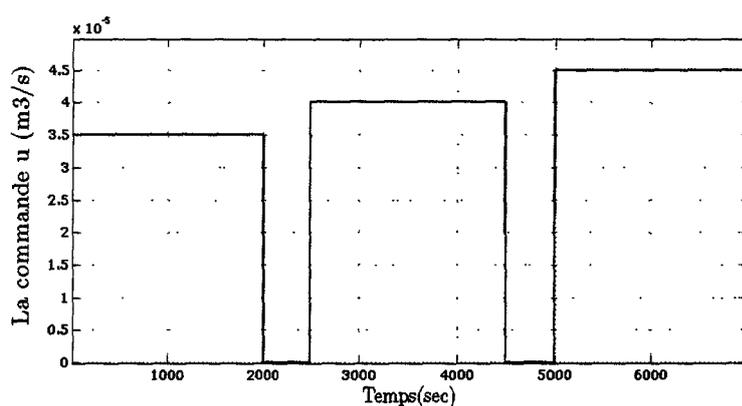


Figure 1.20 : Différents débits volumétriques d'entrée du système en boucle ouverte

caractéristiques non-linéaires d'écoulement, comme l'équation d'écoulement de Torricelli et les deux paramètres incertains  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$ . En raison des caractéristiques des valves, tuyau

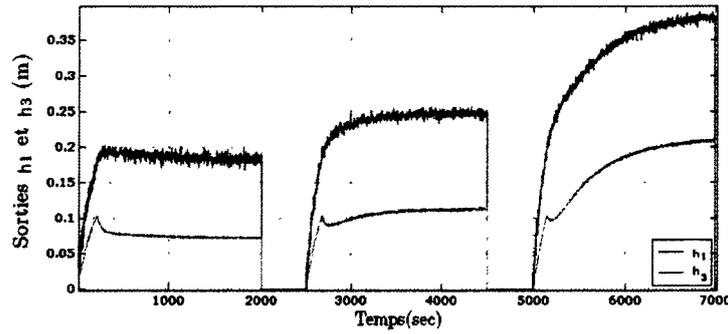


Figure 1.21 : Sortie du système pour pour différents débits volumétriques d'entrée

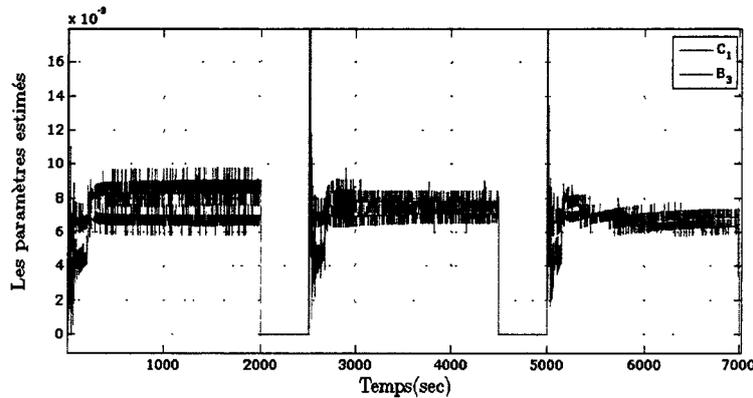


Figure 1.22 : Paramètres du système

et pompe, le comportement du système contient plus de non-linéarités que le modèle mathématique décrit par les équations (1.92) et (1.93). Ceci peut être vérifié à partir des caractéristiques statiques montrées par les figures 1.18 et 1.19.

## 1.5 Conception d'une loi de commande robuste par mode de glissement d'ordre un

### 1.5.1 Présentation de la loi de commande

La stratégie de commande proposée est appliquée au banc d'essai incluant deux réservoirs (figure 1.14)[BMM CAB07]. Soit  $x_1 = h_1$ ,  $x_2 = h_3$  et  $u = Q_1$ . Le système à deux cuves peut être modélisé par les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -C_1\sqrt{x_1 - x_2} + \frac{u}{A} \\ \dot{x}_2 &= C_1\sqrt{x_1 - x_2} - B_3\sqrt{x_2} + d(t) \end{aligned} \quad (1.100)$$

$d(t)$  représente la perturbation mal adaptées.  $d(t)$  et sa dérivée par rapport au temps sont bornées,  $|d(t)| < D_0$  et  $|\dot{d}(t)| < D_1$ . Le degré relatif du système (1.100) est égal à deux. Afin de faire apparaître l'entrée  $u(t)$  de manière explicite dans la dérivée de la surface de glissement, l'ordre du système nous impose le choix d'une surface décrite par l'équation suivante :

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{x}_2 = \dot{\tilde{x}}_2 + \lambda \tilde{x}_2 \quad (1.101)$$

où  $\lambda$  est un paramètre positif. Notons par  $x_{2d}$  la consigne désirée du système, et  $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - x_{2d}(t)$  l'erreur de suivi. Par dérivation de cette surface, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_{2d}) + \lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) \\ &= -C_1^2 + \frac{B_3^2}{2} + \lambda(C_1\sqrt{x_1 - x_2} - B_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) - \ddot{x}_{2d} \\ &\quad + \frac{C_1 B_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \lambda d + \dot{d} + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \\ &= \psi_1 + \lambda d + \dot{d} + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \end{aligned} \quad (1.102)$$

Nous définissons la commande équivalente à partir de la relation (1.102) en supposant que  $\dot{s} = 0$  :

$$u_{eq} = -\frac{2A}{\hat{C}_1} \sqrt{x_1 - x_2} \hat{\psi}_1 \quad (1.103)$$

$\hat{\psi}_1$  étant une estimation de  $\psi_1$ , à savoir :

$$\hat{\psi}_1 = \left[ -\hat{C}_1^2 + \frac{\hat{B}_3^2}{2} + \frac{\hat{C}_1 \hat{B}_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \lambda(\hat{C}_1\sqrt{x_1 - x_2} - \hat{B}_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) - \ddot{x}_{2d} \right]$$

où  $\hat{C}_1$  est un paramètre non nul. Finalement la commande appliquée au système, en respectant l'attractivité de la surface de glissement est la suivante :

$$u = -\frac{2A}{\hat{C}_1} \sqrt{x_1 - x_2} \hat{\psi}_1 - \kappa \text{sign}(s) \quad (1.104)$$

En choisissant la fonction candidate de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$ , la condition d'atteinte est obtenue par :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} \leq -\eta|s(x)|, s \neq 0 \quad (1.105)$$

où  $\eta$  est une constante strictement positive.

En utilisant les relations (1.102) et (1.104) nous pouvons récrire  $\dot{V}$  :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s \left[ \psi_1 + \lambda d + \dot{d} + \frac{C_1}{2A} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} (u_{eq} + u_n) \right] \\ &= s \left[ \tilde{\psi}_1 + \lambda d + \dot{d} + \hat{\psi}_1 - (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) \hat{C}_1^{-1} \hat{\psi}_1 - (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) \hat{C}_1^{-1} \kappa \text{sign}(s) \right] \quad (1.106)\end{aligned}$$

$$= s \left[ \tilde{\psi}_1 + \lambda d + \dot{d} - \tilde{C}_1 \hat{C}_1^{-1} \hat{\psi}_1 - (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) \hat{C}_1^{-1} \kappa \text{sign}(s) \right] \quad (1.107)$$

où  $\tilde{\psi}_1 = \psi_1 - \hat{\psi}_1$ . La condition (1.105) est vérifiée si :

$$\begin{aligned}\kappa &> (\tilde{C}_1 + \hat{C}_1) \hat{C}_1^{-1} (|\tilde{C}_1 \hat{C}_1 \hat{\psi}_1 + \tilde{\psi}_1 + \lambda d + \dot{d}| + \eta) \\ &> \tilde{C}_1 (\hat{C}_1 + \tilde{C}_1)^{-1} |\hat{\psi}_1| + \tilde{C}_1 (\hat{C}_1 + \tilde{C}_1)^{-1} (|\tilde{\psi}_1| + \lambda |d| + |\dot{d}| + \eta) \quad (1.108)\end{aligned}$$

L'expression de la fonction inconnue est donnée par :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= -\tilde{C}_1^2 - 2\tilde{C}_1 \hat{C}_1 + \frac{\tilde{B}_3^2}{2} + \tilde{B}_3 \hat{B}_3 + \lambda \tilde{C}_1 \sqrt{x_1 - x_2} + \frac{\tilde{B}_3 \hat{C}_1 + \tilde{C}_1 \tilde{B}_3 + \hat{B}_3 \tilde{C}_1}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} \\ &\quad - \lambda \tilde{B}_3 \sqrt{x_2} \\ |\tilde{\psi}_1| &< G_1 \quad |\tilde{C}_1| < H_1 \quad |d| < D_0 \quad |\dot{d}| < D_1 \quad (1.109)\end{aligned}$$

Le choix de la valeur de la constante  $\kappa$  est donné tel que :

$$\kappa > \frac{H_1}{\hat{C}_1 - H_1} |\hat{\psi}_1| + \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_1 - H_1} (G_1 + \lambda D_0 + D_1 + \eta) \quad (1.110)$$

Avec un bon choix de  $\kappa$ , la condition  $s\dot{s} < 0$  est toujours vérifiée. La fonction de commutation  $s(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2)$ , converge en un temps fini  $T_r$  vers zéro et, par conséquent, la convergence des trajectoires de phase est assurée vers les références désirées du système en boucle fermée.

### 1.5.2 Résultats expérimentaux de la CMG classique

La loi de commande est obtenue à partir de l'équation (1.104). Elle a été implantée sur la carte dSpace1102. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à  $1kHz$ . Cette loi de commande nécessite trois paramètres de réglage  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\kappa$ . Pour assurer la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov et garantir une erreur de niveau relativement faible et sans dépassement, nous avons réglé ces paramètres tels que :  $\lambda = 25$ ,  $\eta = 5$  et  $\kappa = 25$ . Nous mettons en œuvre successivement deux tests expérimentaux sur le banc d'essai.

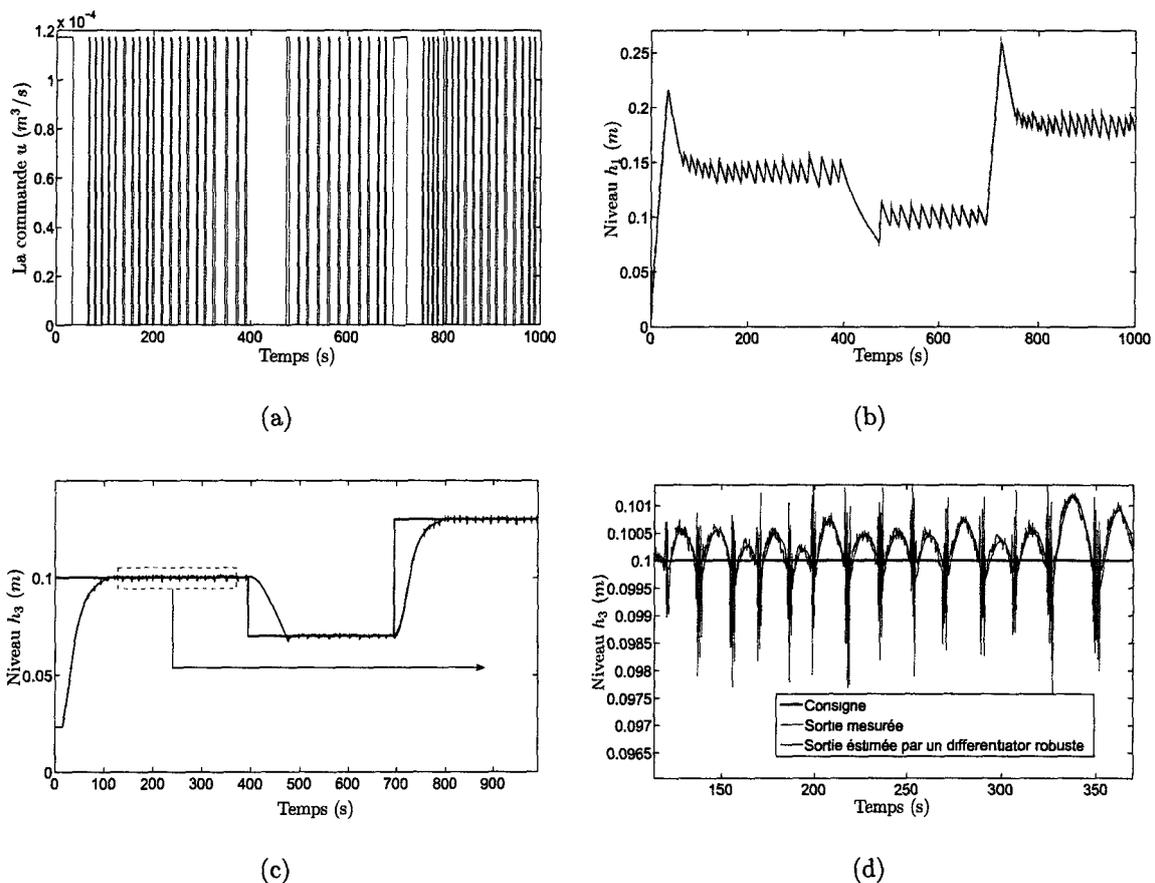
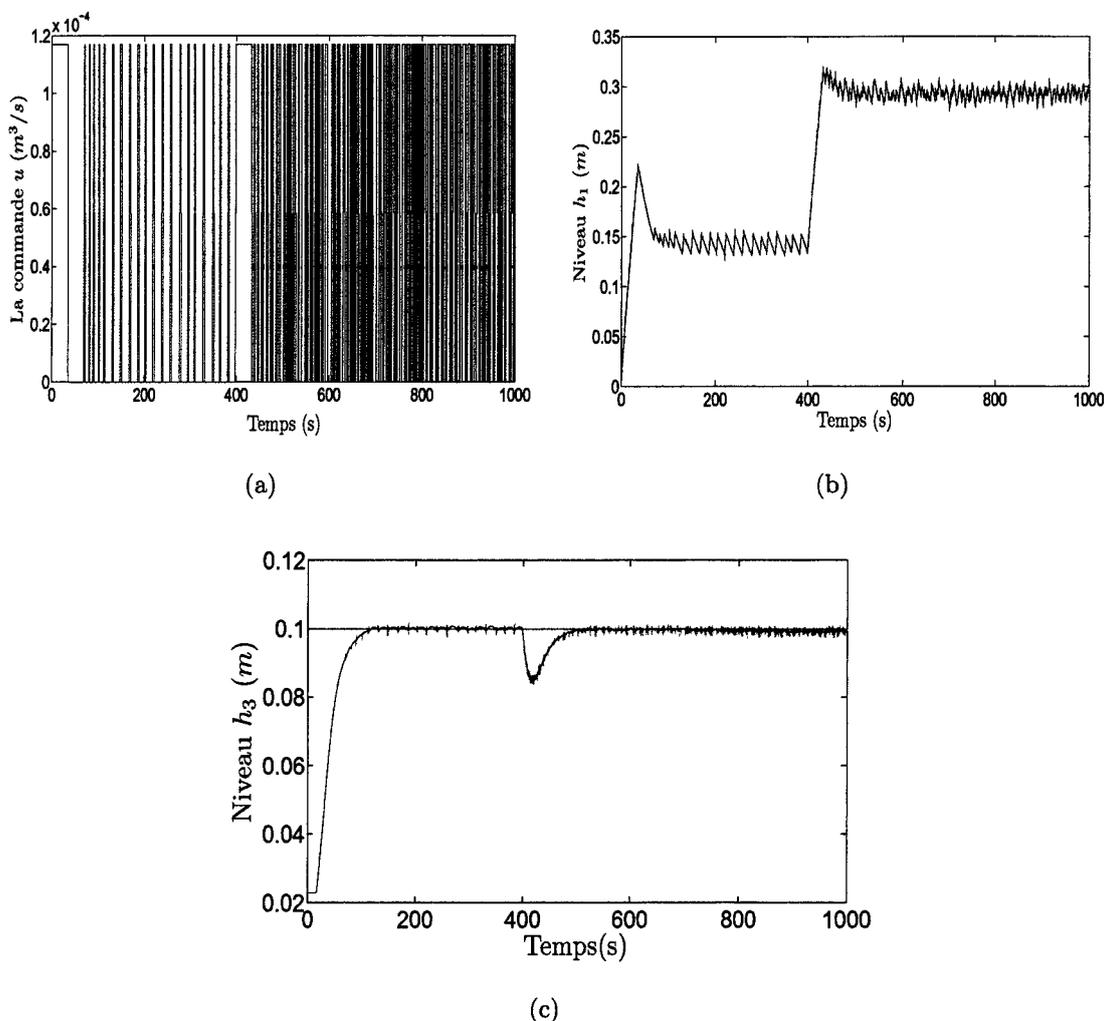


Figure 1.23 : Résultats expérimentaux obtenus avec la CMG classique

Nous remarquons au premier test l'effet du changement de la consigne. Dans le deuxième, et dans le but de montrer l'intérêt de la technique de commande, nous nous proposons d'étudier la robustesse par rapport aux perturbations extérieures. Pour ce faire nous avons utilisé la troisième colonne  $T_2$  pour créer des perturbations extérieures par l'ouverture et fermeture de la Vanne  $V_{a_{23}}$ , (voir figure 1.15).

Les courbes de la figure 1.23 montrent les résultats obtenus en appliquant la commande

classique par mode de glissement. La figure 1.23(a) montre la commande chahutée obtenue avec la loi de commande discontinue (1.104). Nous constatons que dans le cas nominal, nous n'avons pas d'erreur (figure 1.23(d)).

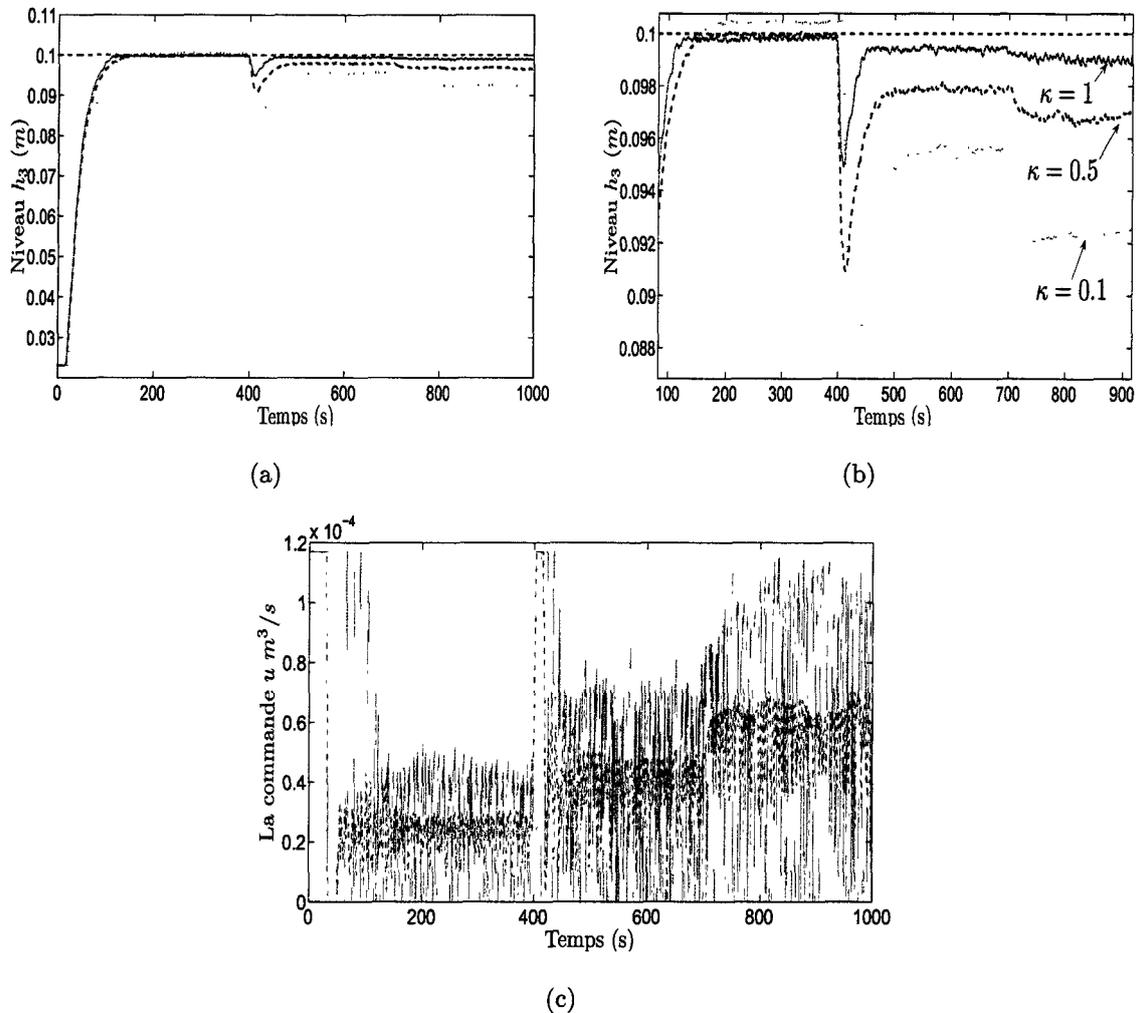


**Figure 1.24** : Résultats expérimentaux obtenus avec la CMG classique en présence de perturbations mal adaptées

La figure 1.24(c) montre bien que la sortie suit sa référence malgré la présence de perturbations. La figure 1.24(a) montre la réaction de la commande pour garder la valeur de la sortie à  $h(t) = h_{ref} = 0.1m$ . Toutefois, la sortie est toujours maintenue, ce qui montre la robustesse de la loi de commande par rapport aux perturbations extérieures.

Les courbes d'évolution du niveau d'eau et de la commande montrent l'effet indésirable de broutement. La sortie oscille autour de la référence avec une amplitude maximale égale à

2mm. Les résultats expérimentaux obtenus en utilisant la Commande par Mode de Glissement avec la fonction de Saturation (CMGS) seront présentées comme suit.



**Figure 1.25 :** Résultats expérimentaux obtenus avec la CMGS en présence de perturbations mal adaptées

On peut conclure à partir de la figure 1.25 qu'il existe un compromis entre la robustesse et la valeur de l'amplitude de la couche limite  $\phi$  et que le chattering devient important en augmentant la constante  $\kappa$ . Pour remédier au phénomène de broutement sans perdre les propriétés de robustesse, nous allons utiliser dans la section qui va suivre une approximation continue de la commande par mode de glissement avec une couche limite variable (CMGCLV).

### 1.5.3 Résultats expérimentaux avec couche limite variable

Dans ce qui suit, les algorithmes les résultats portant sur l'utilisation des fonctions d'adoucissement avec couche limite variable seront exposés. L'objectif étant de résoudre le problème de broutement souligné au paragraphe précédent.

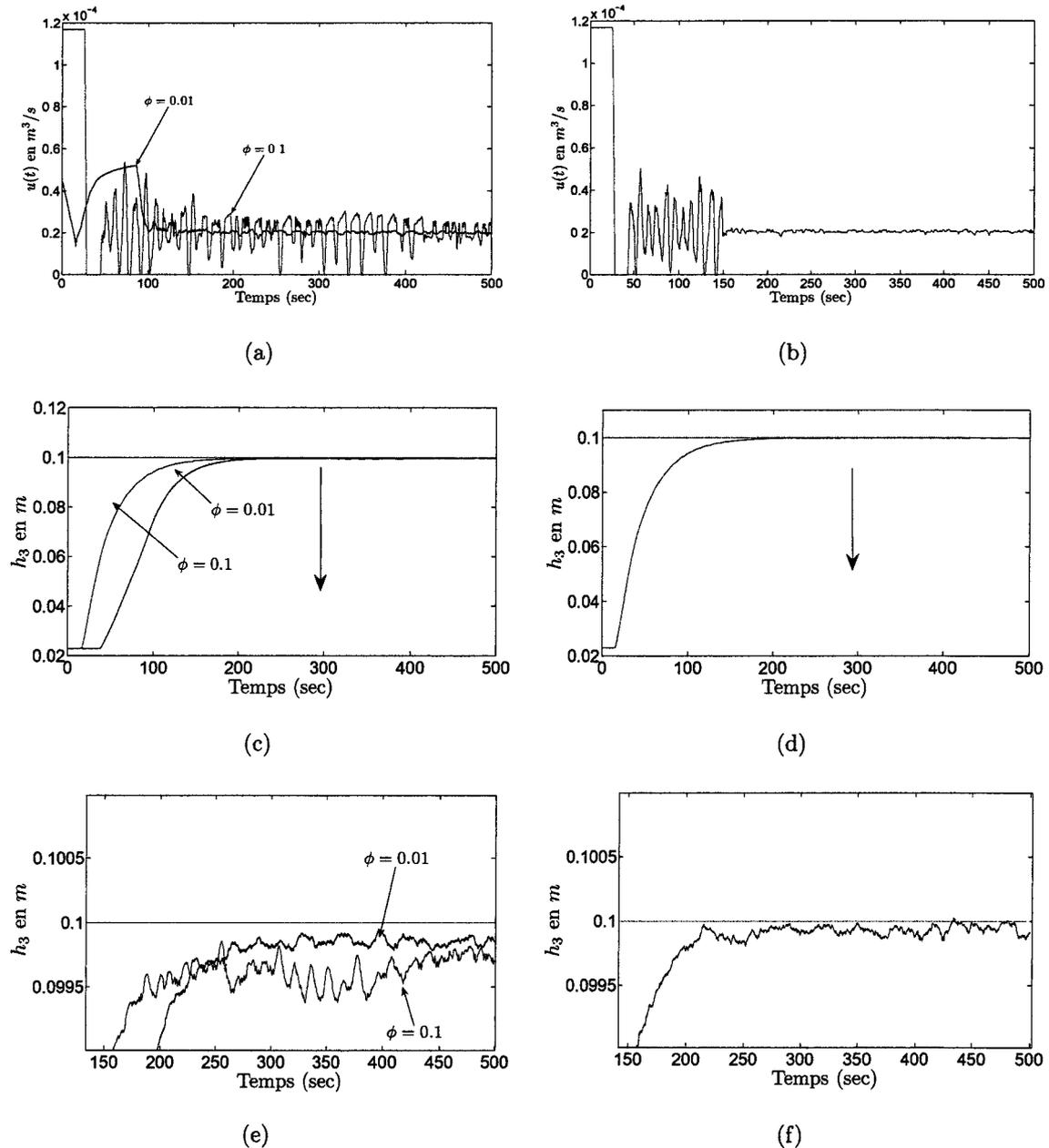


Figure 1.26 : Résultats expérimentaux obtenus avec la CMGCLV

À partir des résultats expérimentaux montrés dans la figure 1.25(a), on constate que le broutement existe et il est inévitable pour la commande continue avec une couche limite

fixe ( $\phi$ ). La fonction d'adoucissement utilisée dans notre cas est donnée comme suit :

$$u_n = \begin{cases} -\kappa\phi\frac{s}{|s|} & \text{si } |s| \geq \phi \\ -\kappa s & \text{si } |s| < \phi \end{cases} \quad (1.111)$$

En revanche, on peut observer à la figure 1.26(b) que le chattering n'existe plus en utilisant la CMGCLV. Toutefois, sur une échelle agrandie, à la figure 1.26(f), l'erreur de suivi obtenue avec la nouvelle approche CMGCLV est de  $0.1mm$ , alors que cette erreur de suivi en utilisant la CMGS était approximativement de  $0.5mm$ , ce qui était évidemment beaucoup trop important.

#### 1.5.4 Introduction de l'action intégrale

Nous avons vu que l'introduction d'une fonction continue à la place de la fonction *sign* fait apparaître une erreur sur la sortie. L'approche de la couche limite variable nous a permis de diminuer le chattering et l'erreur statique. Par ailleurs, nous avons montré au paragraphe 1.2.3 que la surface de glissement reste à l'intérieur de la couche limite et nous avons vu que la solution de l'équation différentielle 1.61 dépend des erreurs de modélisation et des perturbations extérieures. Dans le cas d'une régulation, nous avons une erreur statique qui dépend de  $\varepsilon$ . Pour éliminer cette erreur, on injecte une action intégrale quand la surface se trouve à l'intérieur de la couche limite bornée par  $\phi$ . En régime permanent on définit  $e_0 \geq \sup_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_2\|$  telle que :

$$u(t) = u_{eq} + u_d + u_r \quad (1.112)$$

avec :

$$u_r = \begin{cases} -K_r \int \tilde{x}_2 dt & \text{si } \|\tilde{x}_2\| \leq e_0 \\ 0 & \text{si } \|\tilde{x}_2\| > e_0 \end{cases} \quad (1.113)$$

$K_r$  est une constante d'intégration. Dans le cas où la dynamique de  $\varepsilon(t)$  n'est pas négligée, la solution de l'équation (1.61) dépend de  $\varepsilon(t)$ .

La figure 1.27(f) présente la réponse  $h_3(t)$  du système. Dans le cas où on applique une perturbation  $w_1$  (i.e la dynamique du système est négligeable), la sortie converge vers la référence et nous avons une erreur inférieure à 0.2%. On remarque comme nous l'avons dit à la proposition 1.1, que l'action intégrale compense bien les incertitudes paramétriques et les perturbations extérieures.

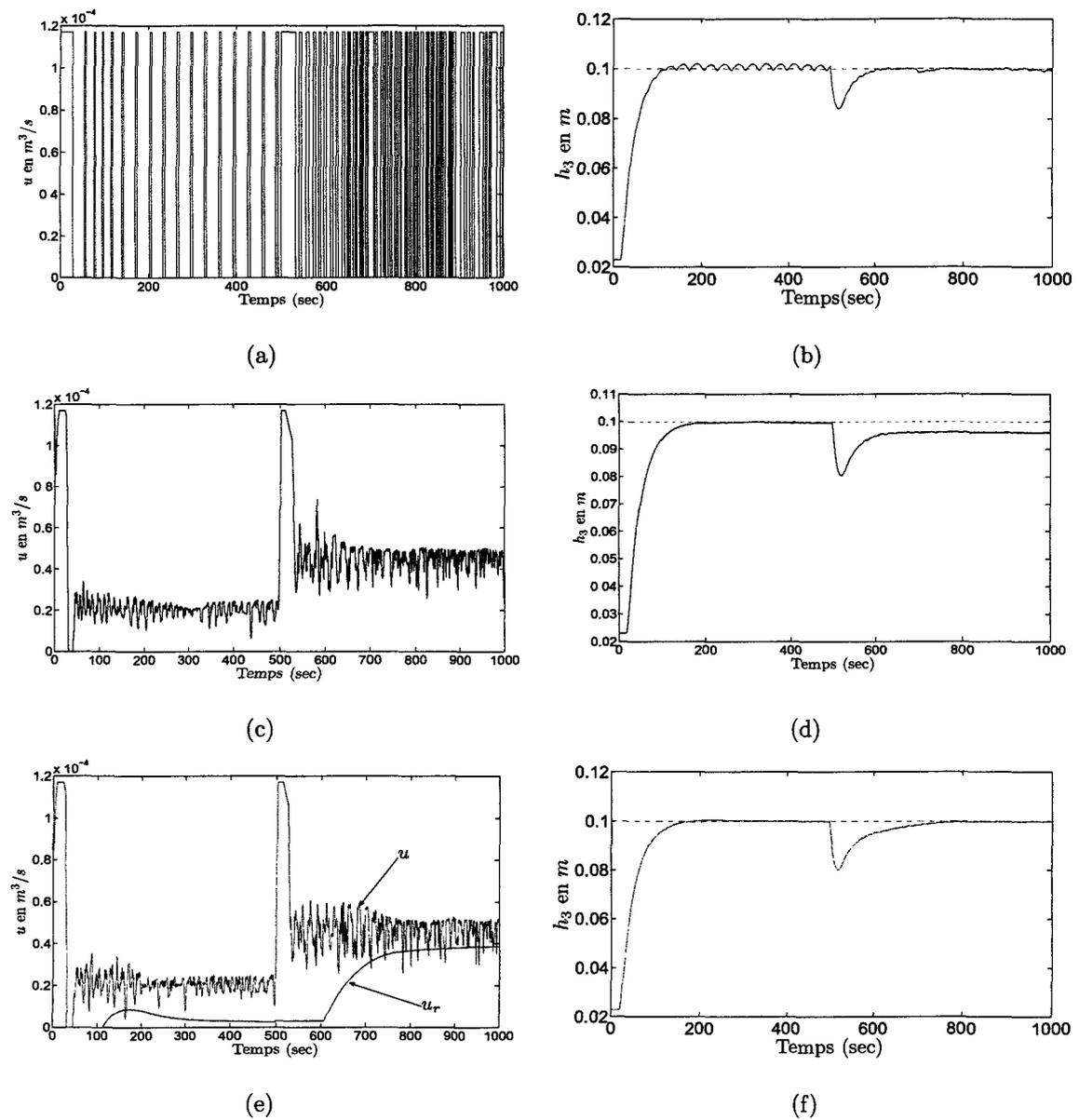
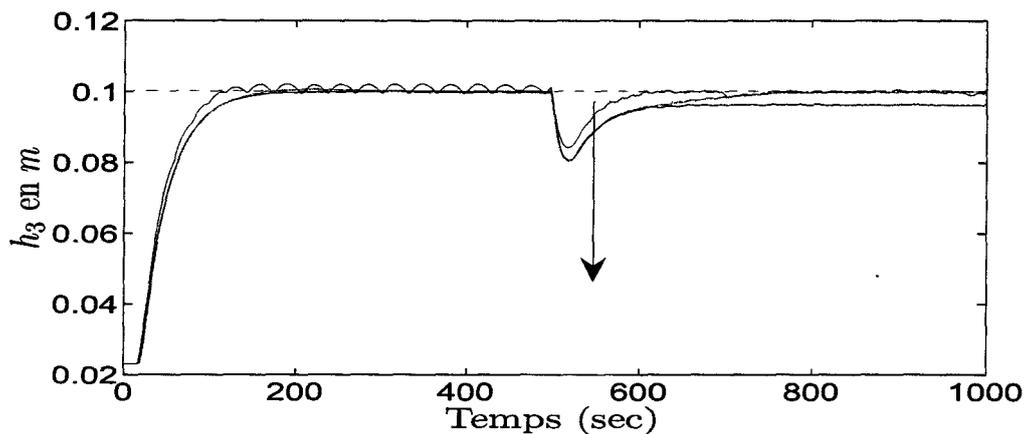
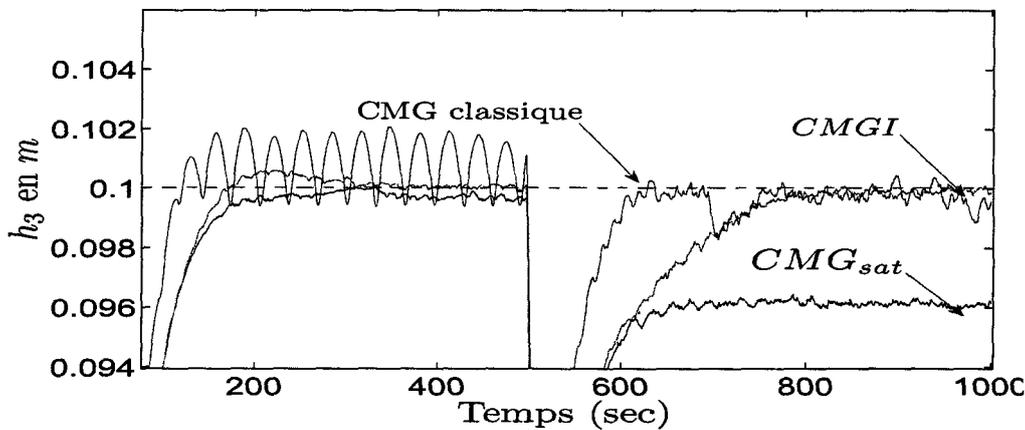


Figure 1.27 : Résultats expérimentaux obtenus avec la Commande par mode de glissement avec action Intégrale (CMGI)



(a)



(b)

**Figure 1.28 :** Sortie du système en utilisant les trois commandes CMG, CMGS et CMGI

Les trajectoires d'états du système en boucle fermée sont illustrées par la figure 1.28(a). Ces trajectoires correspondent à des résultats obtenus respectivement par la CMG, la CMGS et enfin la CMGI. La figure 1.28(b) représente un zoom de l'évolution des sorties commandées. Nous pouvons constater que la commande du système en boucle fermée est robuste et que l'objectif d'atténuation de broutement est atteint.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la commande par mode de glissement d'ordre un des systèmes non linéaires incertains. La première partie de ce chapitre a été consacrée à une présentation générale des concepts de base de la CMG (condition

d'existence, phénomène de réticence, propriétés de robustesse,...).

Les avantages de la commande par mode de glissement se situent d'une part dans la simplicité de l'implantation des lois de commande, et d'autre part dans la robustesse qu'elle offre vis-à-vis des incertitudes et des perturbations extérieures. On peut cependant noter que les performances du système peuvent être altérées à cause de l'oscillation forte de l'organe de commande. Ce phénomène, appelé broutement (*Chattering Problem*), rend la régulation difficile voire même impossible dans certains cas.

La seconde partie de ce chapitre a été dédiée à la construction d'un algorithme de commande par mode glissant d'ordre un qui diminue le broutement et qui garanti une bonne régulation. Cet algorithme consiste dans un premier temps à remplacer la couche limite constante par une autre variable dans le temps et par la suite à ajouter un terme intégral à la commande d'entrée (compensation de l'erreur), afin de rendre robuste vis-à-vis des perturbations cette commande nominale basée sur des fonctions d'adoucissement.

# Chapitre 2

## Commande par mode de glissement d'ordre supérieur

### Introduction

La CMG est une approche largement utilisée pour la conception de loi de commande des systèmes incertains. L'avantage d'une telle approche réside dans sa robustesse par rapport aux perturbations [Utk92], [UGS99]. De plus, elle est généralement très simple à mettre en œuvre. L'inconvénient majeur des modes glissants classiques du premier ordre est l'existence d'un effet de réticence ou broutement [Boi03], [Fri01], [UGS99]. Ce broutement est en particulier généré par les dynamiques non modélisées dans les dispositifs de commutation [BBKU85]. Pour palier à ce problème, trois approches sont utilisées : l'approximation continue de la fonction "sign" (par exemple, la fonction de saturation [BZ86]), l'observateur d'état asymptotique pour limiter la réticence [BBKU85], les algorithmes de commande d'ordre supérieur [EKL86]. L'approche par mode de glissement d'ordre supérieur permet la réduction voir même l'annulation du phénomène de chattering, tout en conservant les propriétés de robustesse et de convergence en un temps fini. ([BPPU03], [BPU01], [FL02],[Lev93, Lev03], [OAC03], [SR02] ).

Ce chapitre présente la méthode de commande par mode de glissement d'ordre supérieur (CMGOS). Nous décrivons en particulier les algorithmes d'ordre deux (twisting et super twisting). Nous démontrons que, contrairement à l'algorithme de super twisting, la loi de commande utilisant l'algorithme de twisting nécessite la dérivée de la surface, ce qui en-

traîne le " chahutement " de la commande. Dans ce contexte, nous présentons l'algorithme de dérivation (différentiateur) basé sur les modes glissant d'ordre supérieur ainsi que son implantation sur un système avec des sorties fortement bruitées. Les deux méthodes sont exposées puis validées sur le banc d'essai présenté au chapitre 1.

## 2.1 Formulation du problème

L'inconvénient majeur de la CMG d'ordre un, réside dans les oscillations appelées phénomène de " broutement " ou " chattering ". Plusieurs solutions ont été exposées dans le premier chapitre pour remédier à ces oscillations. Nous présentons une autre méthodologie pour atténuer ce phénomène de chattering en appliquant la discontinuité sur la dérivée de la commande [Lev93]. Cette commande permet aussi d'assurer un comportement robuste du système et une convergence en un temps fini.

Considérons un système non linéaire affine, dont la dynamique est décrite par le système différentiel :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + b(x, t)u \\ s &= s(x, t) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n] \in X \subset \mathbb{R}^n$  représente l'état du système avec  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}$  l'entrée de commande, et  $y \in \mathbb{R}$  est la sortie à commander. On suppose que l'entrée de commande  $u$  est bornée, éventuellement discontinue et dépendante de l'état et du temps.  $f$  et  $b$  sont des fonctions supposées suffisamment différentiable, mais connues de façon incertaine.  $s(x, t)$  est une fonction suffisamment différentiable telle que ses  $(r - 1)$  premières dérivées par rapport au temps ne soient fonction que de l'état  $x$  (ce qui signifie qu'elles ne contiennent aucune discontinuité). Enfin  $r$  désigne le degré relatif du système (Définition 2.1).

L'objectif de la synthèse d'une Commande par Mode de Glissement d'Ordre Supérieur (CMGOS) est de contraindre les trajectoires du système (2.1) à évoluer en un temps fini sur l'ensemble de glissements d'ordre  $r$  défini par :

$$S^r = \{x \in \mathbb{R}^n | s = \dot{s} = \dots = s^{r-1} = 0\}, r \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Nous présentons ici brièvement la théorie de la CMGOS. Pour plus de précisions, cette théorie est bien développée dans [EKL86], [Lev93],[BFLU99], [Flo00], [FL02].

**Définition 2.1.** [Lev93] Soit  $S^r$  l'ensemble de glissements d'ordre  $r$ , considéré non vide, et supposons qu'il définisse localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors la dynamique satisfaisant (2.2) est appelée mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la surface de glissement  $s$ .

**Définition 2.2.** [Lev93] On dit que la loi de commande  $u$  est **un algorithme glissant idéal d'ordre  $r$**  par rapport à  $s$  si elle génère un mode glissant d'ordre  $r$  sur  $S^r$ , i.e.

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \quad (2.3)$$

Comme pour un mode glissant classique, on peut considérer qu'en régime glissant le système est régi par la dynamique équivalente :

$$\dot{x} = f(t, x, u_{eq}(t, x))$$

où  $u_{eq}$  est la commande équivalente selon Utkin [Utk77] déterminée à partir de l'équation :

$$\dot{s} = s'_x(t, x) + s'_x(t, x)f(t, x, u_{eq}(t, x)) = 0$$

dont la solution est supposée unique.

## 2.2 Mode de glissement réel

Dans la définition 2.1, il est supposé que l'ensemble de glissement d'ordre  $r$  est atteint exactement, et lorsque la fréquence de commutation tend vers l'infini, un tel régime est appelé "glissement idéal". Toutefois, ce n'est pas le cas en pratique étant donné les imperfections des organes de commande, le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface considérée. Ce comportement est qualifié de régime glissant réel.

**Définition 2.3.** Soit une fonction  $\gamma(\epsilon)$  telle que  $\gamma(\epsilon)$  tend vers 0 si  $\epsilon$  tend vers 0. **Un algorithme de commande réel** sur la surface  $s = 0$  est dit d'ordre  $r$  ( $r > 0$ ) par rapport à  $\gamma(\epsilon)$ , si pour tout ensemble local de conditions initiales et pour tout intervalle  $[t_1 \ t_2]$ , il existe une constante  $C$ , telle que l'état  $x$  en régime permanent satisfait :

$$|s| \leq C|\gamma(\epsilon)|^r \quad t \in [t_1 \ t_2]$$

Cette définition implique en outre que l'inégalité ci-dessus est vérifiée en un temps fini. Si  $\gamma(\epsilon)$  est le plus intervalle de temps de la commande alors le terme " par rapport à  $\gamma(\epsilon)$  " est omis. La définition suivante est une extension aux algorithmes concernant des lois de commande discontinues et des fréquences de commutations bornées [Lev93], [FL02].

**Définition 2.4.** *Soit un algorithme, dépendant d'un paramètre  $\epsilon$ , générant un régime glissant sur la surface  $s$ , et dont l'action est continue par morceau par rapport au temps, avec des intervalles de continuité pas plus petits que  $\tau(\epsilon) > 0$ , où  $\tau(\epsilon) \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si cet algorithme est d'ordre  $r$  par rapport à  $\tau$ , on dit alors que c'est un algorithme par modes glissants réel d'ordre  $r$  par rapport à la surface  $s$ .*

**Proposition 2.1.** [Lev01] *Soit  $l$  un nombre entier inférieur à  $r$ . Si la  $l^{\text{ième}}$  dérivée  $s^{(l)} = (d/dt)^l s(t, x(t, \epsilon))$  est uniformément bornée, alors il existe des constantes  $C_1, C_2, \dots, C_{l-1}$  telles que, en régime établi on a les inégalités suivantes :*

$$|\dot{s}| \leq C_1 \tau^{l-1}, \quad |\ddot{s}| \leq C_2 \tau^{l-2}, \quad \dots, \quad |s^{(l-1)}| \leq C_{l-1} \tau$$

Il en résulte qu'un algorithme d'ordre  $r$  permettra, si la méthode d'intégration est à pas variable majorée par  $\tau$ , d'obtenir la précision de convergence suivante [Flo00] :

$$|s| = O(\tau^r), \quad |\dot{s}| = O(\tau^{r-1}), \quad \dots, \quad |s^{r-1}| = O(\tau)$$

**Proposition 2.2.** [Lev01] *Soit  $\delta > 0$  et  $p > 0$  des entiers et soit  $\{\epsilon_i\}$  une séquence avec  $\epsilon_i$  tendant vers 0. Supposons que pour chaque  $\epsilon_i$  il existe un intervalle de temps sur lequel, le régime permanent de l'état est régulier et pour chaque intervalle la  $p^{\text{ième}}$  dérivée de  $s$  satisfait :*

$$|s^{(p)}| \geq \delta$$

sur l'ensemble de l'intervalle, alors l'ordre du glissement réel satisfait  $r \leq p$ .

À partir de ces propositions, l'ordre  $r$  du glissement réel satisfait :

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$$

Pour les régulateurs à structure variable classique, seul le premier ordre est vérifié avec commutation discrète.

## 2.3 Surface généralisée et degré relatif

Considérons un système dynamique et son modèle présumé linéaire issu de l'identification [Lan88] :

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)}, \quad a_n = 1 \quad (2.4)$$

L'ordre du système est  $n$ , la dynamique des zéros est d'ordre  $\alpha$  et le degré relatif  $n^* = n - \alpha$ . On présente ci-dessous une évaluation des ordres et degré du système à commander  $(n, n^*, \alpha)$ .

À partir du glissement sur des surfaces d'ordre croissant par observation des évolutions  $s(x, t)$  et de  $u(t)$ . Confirmons un résultat fondamental, démontré au paragraphe 1.1.3 du Chapitre 1, sur l'existence d'un régime glissant, c'est-à-dire la condition  $s\dot{s} < 0$  exprimée en fonction du degré relatif du système ayant comme entrée la commande discontinue  $u(t)$  et comme sortie la fonction de surface  $s(x, t)$ .

Considérons une surface de glissement linéaire par rapport aux variables d'état, définie dans l'espace des phases, par la fonction de surface généralisée d'indice  $\beta$  ci-après :

$$s_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\beta} c_k y^{(k-1)} \quad c_{\beta} = 1 \quad (2.5)$$

Le vecteur  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  concerne le système d'entrée  $u$ ,  $\beta$  est un entier voisin de  $n^*$ .

**Théorème 2.1.** *Un régime glissant existe sur la surface définie par  $s_{\beta}(t)$  si le degré relatif  $r$  du système ayant comme entrée la commande discontinue  $u$  et comme sortie  $s_{\beta}(t)$  est égal à  $un$ .*

On montre que l'ordre  $\beta$  de la surface est alors égal au degré relatif  $n^*$  du système étudié, l'équation (2.4) s'écrivant dans le formalisme de Laplace :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(p) = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j u(p) \quad (2.6)$$

La fonction de surface  $s_{\beta}(t)$  a pour expression dans le formalisme de Laplace :

$$s_{\beta}(p) = \sum_{k=0}^{\beta} c_k p^{k-1} y(p) \quad (2.7)$$

On en déduit :

$$\frac{s_\beta(p)}{u(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j \sum_{k=1}^{\beta} c_k p^{k-1}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (2.8)$$

Le degré relatif  $r$  est égal à :

$$r = n - (\alpha + \beta - 1) = (n - \alpha) - \beta + 1 \quad \text{avec} \quad n - \alpha = n^* \implies r = n^* - \beta + 1$$

Si le régime glissant existe sur  $s_\beta = 0$  alors  $r = 1$  soit  $\beta = n^*$ .

Le théorème précédent peut être généralisé pour un système d'ordre  $n$  (degré de son équation caractéristique) et pour cela la transmittance s'écrit :

$$\frac{s_n(p)}{v(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j \sum_{k=1}^n c_k p^{k-1}}{p^\alpha \sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (2.9)$$

On obtient pour le degré relatif :

$$r = (n + \alpha) - (n - 1) - \alpha = 1 \quad (2.10)$$

On retrouve bien le résultat du théorème concernant le degré relatif égal à un pour le système ayant comme entrée la commande discontinue  $v = u^{(\alpha)}$  et comme sortie  $s_n(x, t)$ . Il lui correspond le régime glissant sur la surface  $s_n(x, t) = 0$  pour le système de degré  $(n, \alpha)$ .

Il faut noter que cette méthode fait apparaître deux cas différents de modes glissants : Le premier est un régime glissant classique d'ordre un sur la surface  $s(x, t) = 0$ , alors que le second est un ordre  $n$ , asymptotiquement stable, par rapport à la surface  $S$ , car on contraint le système à évoluer sur la variété de glissement d'ordre  $n$  ( $s = \dot{s} = \dots = s^{(n-1)}$ ). Un des inconvénients de cette méthode est qu'il est nécessaire d'avoir un nombre d'informations croissant avec le degré relatif du système, sur une partie de l'état. Ceci montre, d'autre part que, pour un système de degré relatif strictement supérieur à un, il n'est pas possible d'obtenir une convergence en un temps fini sur une surface  $s$  par un mode glissant d'ordre un. Pour avoir un tel résultat, l'utilisation d'un algorithme de contrôle d'ordre supérieur s'avère alors nécessaire. En effet, si le système est de degré relatif  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$ , un algorithme par mode glissant d'ordre  $r$  permettra d'obtenir une convergence en un temps fini sur la surface  $s = 0$  [Flo00].

## 2.4 Mode de glissement d'ordre supérieur

Le régime glissant standard est basé sur l'annulation de la surface de glissement. Un régime glissant d'ordre "r" (noté r-glissant) agit sur les  $(r - 1)$  premières dérivées successives de la variable de glissement. L'objectif est de forcer le système à évoluer sur la surface et à la maintenir, ainsi que ses  $(r - 1)$  premières dérivées successives à zéro :

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \quad (2.11)$$

où  $r$  désigne le degré relatif du système par rapport à la surface de glissement.

Le degré relatif d'un système est en fait le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie, par rapport au temps, pour y faire apparaître l'entrée de manière explicite [PB02].

Par exemple pour un degré relatif  $r = 1$ , nous avons :

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \neq 0$$

Et pour un degré relatif  $r > 1$  :

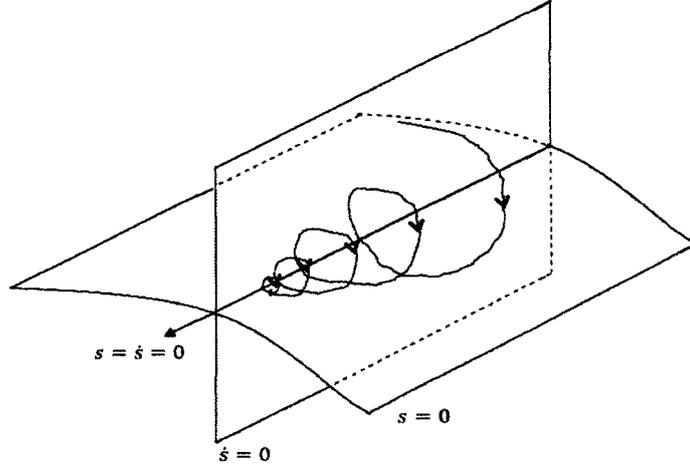
$$\frac{\partial s^{(i)}}{\partial u} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial s^{(r)}}{\partial u} \neq 0$$

### 2.4.1 Mode de glissement d'ordre deux

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux algorithmes par modes glissants d'ordre deux (CMGOD). Le but est de générer un régime glissant d'ordre deux sur une surface convenablement choisie et donc de contraindre les trajectoires du système à évoluer au bout d'un temps fini sur l'ensemble :

$$\mathcal{S}^2 = \{x \in X : s = \dot{s} = 0\} \quad (2.12)$$

On peut observer qu'aux points de glissement d'ordre deux l'ensemble de Filippov des trajectoires admissibles est inclus dans l'espace tangent à la surface  $S$  (figure 2.1). Afin de réaliser les algorithmes par modes glissants d'ordre deux, il est nécessaire d'établir certaines hypothèses de travail pour valider l'atteignabilité de la surface de glissement et la bornitude de la surface  $\ddot{s}$  [BFLU99] :



**Figure 2.1** : Ensemble de glissement d'ordre deux

1. Concernant la fonction contrainte  $s$  et le système d'équations (2.1), nous supposons que  $|u| \leq K$ , constante strictement supérieure à 1 ;  $f$  est une fonction continue de classe  $\mathcal{C}^1$  : la contrainte  $s$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  ; l'état est dans une variété  $X$  de dimension finie. Chaque solution de l'équation (2.1) est définie pour une commande  $u(t)$  continue satisfaisant  $|u(t)| \leq K$  pour tout  $t$ .
2. Supposons qu'il existe  $u_1$  dans  $]0, 1[$  telle que pour toute fonction continue  $u(t)$  avec  $|u(t)| \leq u_1$  quel que soit  $t$ , alors on a  $s(t)u(t) > 0$  pour un ensemble fini du temps  $t$ .
3. Il existe des constantes positives  $s_0, K_m, K_M, u_0$  avec  $u_0 < 1$  telles que :

$$\text{Si } |s(x, t)| < s_0 \quad \text{alors} \quad 0 < K_m \leq \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \leq K_M \quad \forall u$$

$$|u| > u_0 \implies \dot{s}(x, t)u > 0$$

L'ensemble  $\mathcal{R}_l = \{t, x, u : |s(t, x)| < s_0\}$  est appelé région linéaire.

4. Supposons que la dérivée seconde de la contrainte  $s$  est bornée pour toute commande fixée au préalable. Dans la région linéaire  $\{t, x, u : |s(t, x)| < s_0\}$ , l'inégalité  $|L_u L_u s(t, x)| < C_0$  est vérifiée.

**Remarque 2.1.** La dérivée de Lie,  $L_u$  par rapport à la variable  $u$ , est définie par :

$$L_u(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)f(t, x, u)$$

En utilisant le principe de la dérivée partielle indiqué dans la remarque 2.1,  $\dot{s}(t)$  peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}\dot{s}(t, x, u) = L_u s(t, x) &= \dot{s}_t(t, x) + \dot{s}_x(t, x)f(t, x) + \dot{s}_x(t, x)b(x, t)u(t) \\ &= \alpha(x, t) + \beta(x, t)u(t)\end{aligned}\quad (2.13)$$

avec :

$$\begin{aligned}\dot{s}_t(t, x) &= \frac{\partial s}{\partial t} \\ \alpha(x, t) &= \dot{s}_t(t, x) + \dot{s}_x(t, x)f(t, x) \\ \beta(x, t) &= \dot{s}_x(t, x)b(x, t)\end{aligned}$$

On distingue les deux cas suivants :

1. cas A :  $(\beta(x, t) \neq 0 \forall x \in X)$
2. cas B :  $(\beta(x, t) = 0 \forall x \in X)$

#### Cas A.

Considérons la dérivée seconde de  $s(t)$  représentée sous la forme suivante :

$$\ddot{s} = \varphi_A(x, u, t) + \beta(x, t)\dot{u}(t)\quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_A(x, u, t) &= \dot{\alpha}_t(t, x) + \dot{\alpha}_x(t, x)f(t, x) \\ &+ \left[ \dot{\alpha}_x(t, x)b(x, t) + \dot{\beta}_t(x, t) + \dot{\beta}_x(x, t)(f(x, t) + b(x, t)u(t)) \right]\end{aligned}\quad (2.15)$$

Dans ce cas,  $\dot{u}$  est considérée comme la nouvelle entrée de commande. On suppose que l'hypothèse(3) est vérifiée alors dans la région linéaire  $\mathcal{R}_l$  et l'inégalité  $|L_u L_u s(t, x)| < C_0$  est vérifiée.

**Cas B.** Dans ce cas, la commande n'affecte pas directement la dynamique de  $\dot{s}(t)$ , qui est donnée par :

$$\dot{s}(t) = \alpha(x, t)\quad (2.16)$$

La dérivée seconde de  $s(t)$  peut être exprimée par :

$$\ddot{s}(t) = \varphi_B(x, t) + \gamma_B(x, t)u(t)\quad (2.17)$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_B(x, t) &= \dot{\alpha}_t(t, x) + \dot{\alpha}_x(t, x)f(t, x) \\ \gamma_B(x, t) &= \dot{\alpha}_x(t, x)b(x, t)\end{aligned}$$

On suppose que :

$$\gamma_B(x, t) \neq 0 \forall x \in X$$

L'hypothèse (3) peut être transposée au cas présent. Particulièrement,  $\varphi_B(x, t)$  et  $\gamma_B(x, t)$  sont des fonctions bornées à l'intérieur de la région de linéarité  $\mathcal{R}_l$  :

$$0 < K_m \leq \gamma_B(x, t) \leq K_M \quad |\varphi_B(x, t)| < C_0 \quad (2.18)$$

Le problème posé revient, dans les deux cas, à la stabilisation en un temps fini du système auxiliaire du second ordre modélisé par :

$$\begin{cases} y_1(t) = s(x, t) \\ \dot{y}_1 = y_2(t) \\ \dot{y}_2 = \varphi(\cdot) + \gamma(x, t)v(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Quant aux termes  $\varphi(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  et  $v(t)$  ils ont des structures différentes dans le cas A et B.  $v(t)$  représente l'entrée du système où sa dérivée par rapport au temps suivant le degré

cas A	cas B
$\varphi(\cdot) = \varphi(x, u, t)$	$\varphi(\cdot) = \varphi(x, t)$
$v(t) = \dot{u}(t)$	$v(t) = u(t)$

**Table 2.1** : Différentes structures du système modélisé ( $\ddot{s}$ )

relatif par rapport à la fonction contrainte. D'autre part, toute solution (2.14) ou (2.17) doit satisfaire l'inclusion différentielle [Flo00]

$$\ddot{s} \in [-C_0, C_0] + [K_m, K_M] v \quad (2.20)$$

Notons que les hypothèses (2.18), sont relativement peu restrictives puisque si  $\varphi_B$  et  $\gamma_B$  sont continues sur un compact où  $\varphi_B$  ne s'annule pas, elles sont automatiquement vérifiées. On pourra donc se ramener à un compact afin d'appliquer les algorithmes de commande qui seront développés par la suite. Nous allons ensuite décrire quelques algorithmes du second ordre les plus utilisés dans la littérature, tels que l'algorithme de "twisting", l'algorithme de "super-twisting" et les algorithmes de "convergence prédéfinie" [FL02]

### 2.4.2 Algorithme du twisting

Dans l'algorithme dit de "twisting", la convergence en un temps fini vers l'origine du plan de phase  $(y_1, y_2)$  est due à la commutation de la commande entre deux valeurs. Elle est calculée de telle manière que, à chaque commutation, les axes des abscisses et des ordonnées soient croisés de plus en plus près de l'origine (figure 2.2).

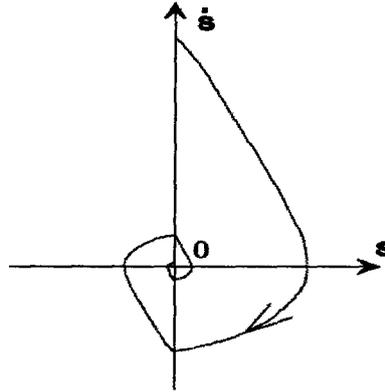


Figure 2.2 : Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de twisting

La loi de commande est énoncée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** [Lev93] *Considérant le système (2.1) et la surface de glissement  $s$ , la loi de commande :*

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(y_1) & \text{si } y_1 \dot{y}_2 \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(y_1) & \text{si } y_1 \dot{y}_2 > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_M &> \lambda_m \\ \lambda_m &> 4 \frac{K_M}{s_0} \\ \lambda_m &> \frac{C_0}{K_m} \\ K_m \lambda_M - C_0 &> K_M \lambda_m + C_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

est un algorithme glissant d'ordre deux par rapport à  $S$  (figure ??).

La preuve de ce théorème est donnée dans l'Annexe (A).

Dans le cas où le système est de degré relatif un, l'algorithme de commande est défini par

la loi de commande ci-dessous [Lev93], [EK193], dans laquelle la condition sur  $|u|$  prévoit  $|u| \leq 1$ .

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(y_1) & \text{si } y_1 y_2 \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(y_1) & \text{si } y_1 y_2 > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

En prenant en considération les trajectoires résultant de la dynamique incertaine de (2.17) et les intervalles de temps d'évaluation entre les croisements successifs de l'axe d'abscisse, il est possible de définir la borne supérieure du temps de convergence [FL02] :

$$T_{tw\infty} \leq t_{M_1} + \Theta_{tw} \frac{1}{1 - \theta_{tw}} \sqrt{|y_{1M_1}|}$$

$y_{1M_1}$  représente la valeur de  $y_1$  au premier croisement d'abscisse dans le plan  $(y_1, y_2)$ ,  $t_{M_1}$  est le temps correspondant.  $\Theta_{tw}$  et  $\theta_{tw}$  sont donnés par les relations [FL02]

$$\begin{aligned} \Theta_{tw} &= \sqrt{2} \frac{K_m \lambda_M + K_M \lambda_m}{(K_m \lambda_M - C_0) \sqrt{K_M \lambda_m + C_0}} \\ \theta_{tw} &= \frac{K_M \lambda_m + C_0}{K_m \lambda_M - C_0} \end{aligned}$$

Dans la pratique quand  $y_2$  n'est pas mesurable, son signe peut être estimé par le signe de la dérivée de la surface dans un intervalle de temps  $\Delta_t$ . Le  $\text{sign}(y_2(t))$  est estimé par l'expression  $\text{sign}(y_1(t) - y_1(t - \tau))$ , d'où l'appellation d'algorithme du twisting échantillonné. Ce dernier est utilisé lorsque le degré relatif du système par rapport à  $s$  est  $r = 2$ . Son intérêt est que, non seulement il ne requiert pas d'information sur la dérivée de la surface considérée, mais il prend également en compte des contraintes d'ordre pratique telles que l'échantillonnage des mesures et de la loi de commande.

Pour des raisons de simplification, la période d'échantillonnage (notée  $\tau$ ) considérée est la même pour la prise de mesures et la commande. La loi de commande se présente de la manière suivante :

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(s) & \text{si } s \Delta_s \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(s) & \text{si } s \Delta_s > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

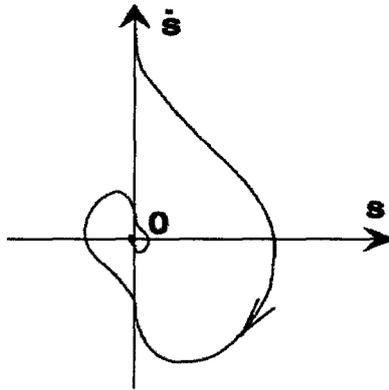
avec

$$\Delta_s \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (s(k\tau) - s((k-1)\tau)) & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\tau$  est la période d'échantillonnage. Les conditions suffisantes sur les gains  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  assurant la convergence en temps fini vers l'origine du plan de phase sont données par les conditions (2.23)

### 2.4.3 Algorithme du super twisting

Dans l'algorithme du twisting,  $s$  et  $\dot{s}$  sont nécessaires pour le calcul de la commande. Toutefois, dans la majorité des cas,  $\dot{s}$  ne peut être directement déterminée et elle doit être calculée à partir de  $s$ . Une telle inférence conduirait à des résultats erronés dans la plupart des cas en raison de la présence de bruit dans le système. L'algorithme de super twisting est conçu afin de réaliser une CMGOD en utilisant uniquement les informations sur  $s$ . Il est caractérisé par la rotation des trajectoires autour de l'origine du diagramme de phase  $(s, \dot{s})$  (figure 2.3). La convergence en temps fini vers l'origine du plan de phase  $(s, \dot{s})$  est due à la commutation de l'amplitude de commande entre deux valeurs différentes de telle sorte que l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (c'est à dire  $s$  et  $\dot{s}$ ) soient traversés de plus en plus près de l'origine. L'amplitude de la commande permute à chaque croisement d'axe, nécessitant de connaître le signe de la dérivée temporelle de la variable de glissement. Cet algorithme a été développé pour le cas du système de degré relatif



**Figure 2.3** : Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de super twisting

$r = 1$  afin d'éviter le phénomène de broutement. La loi de commande est alors donnée par [Lev93] :

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (2.26)$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -W \text{sign}(s) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda |s_0|^\rho \text{sign}(s) & \text{si } |s| > s_0 \\ -\lambda |s|^\rho \text{sign}(s) & \text{si } |s| \leq s_0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Les conditions suffisantes pour la convergence en temps fini sur l'ensemble de glissement (2.12) sont données par [Lev93] :

$$W > \frac{C_0}{K_m}, \quad \lambda^2 \geq \frac{4C_0 K_M (W + C_0)}{K_m^2 K_m (W - C_0)}, \quad 0 < \rho \leq 0.5 \quad (2.29)$$

L'algorithme ci-dessus n'a pas besoin de l'évaluation du signe de  $\dot{s}$ . Un mode de glissement du second ordre exponentiellement stable apparaît si la loi de commande avec  $r = 1$  est employée. Le choix  $\rho = 0.5$  assure que l'ordre du glissement réel maximum pour la réalisation du glissement d'ordre deux soit atteint. Récemment, une nouvelle loi de commande basée sur l'algorithme de super twisting modifié a été développée par [KSL03]. La loi de commande est dans ce cas donnée par :

$$u(t) = -\lambda \text{sign}(s) + u_1(t) \quad (2.30)$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -ku & \text{si } |u| > u_0 \\ -W \text{sign}(s) & |u| \leq u_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

La simplicité de la structure de la loi de commande est tout à fait évidente avec seulement quatre paramètres à déterminer. Les conditions suffisantes correspondantes sur ces paramètres pour la convergence en temps fini sont :

$$u_0 > \frac{C_0}{K_m}, \quad \lambda > u_0, \quad k, W > 0 \quad (2.32)$$

et  $\frac{\lambda}{u_0}$  devrait être grand.

#### 2.4.4 Algorithmes par modes glissants d'ordre quelconque

L'algorithme avec une convergence pré-définie a été généralisé par Levant [Lev99] pour générer des modes glissants d'ordre quelconque. En effet, définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} J_{1,r} &= |s|^{(r-1)/r} \\ J_{i,r} &= \left( |s|^{p/r} + |\dot{s}|^{p/(r-1)} + \dots + |s^{i-1}|^{p/(r-i+1)} \right)^{(r-i)/p} \quad i = 1, \dots, r-1 \\ J_{r-1,r} &= \left( |s|^{p/r} + |\dot{s}|^{p/(r-1)} + \dots + |s^{r-2}|^{p/2} \right)^{1/p} \\ \bar{w}_{0,r} &= s \\ \bar{w}_{1,r} &= \dot{s} + \beta_1 J_{1,r} \text{sign}(s) \\ \bar{w}_{r-1,r} &= s^{(i)} + \beta_i J_{i,r} \text{sign}(\bar{w}_{i-1,r}) \quad i = 1, \dots, r-1 \end{aligned}$$

où  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  et  $p$  sont des constantes positives. Le résultat principal de ces travaux se traduit par le théorème 2.3

**Théorème 2.3.** [Lev98], [Lev99], [Lev01] *Le système (2.1) a un degré relatif  $r$ , par rapport à la surface de glissement  $s$  satisfaisant la condition (2.18). Avec la bonne sélection des valeurs des paramètres positives  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  et  $\alpha$ , il est possible de définir l'expression suivante, qui donnera un régime glissant d'ordre  $r$  avec un temps de convergence fini vers  $s \equiv 0$  :*

$$u = -\alpha \text{sign} [\bar{w}_{i-1,r} (s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)})] \quad (2.33)$$

Les paramètres positifs  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ , doivent être choisis suffisamment grands. Ils déterminent une famille de contrôleurs applicables à tous les systèmes (2.1) du degré relatif  $r$  satisfaisant la condition (2.18). Le paramètre  $\alpha > 0$  est fixé en fonction des constantes  $C_0$ ,  $K_m$  et  $K_M$ . L'algorithme proposé peut être généralisé pour générer des modes glissants d'ordre quelconque. Les lois de commande par mode de glissement d'ordre un, deux, trois et quatre ont respectivement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= -\alpha \text{sign}(s) \\ u &= -\alpha \text{sign}(\dot{s} + |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s)) \\ u &= -\alpha \text{sign}(\ddot{s} + 2(\dot{s}^3 + |s|^2)^{\frac{1}{6}} \text{sign}(\dot{s} + |s|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(s))) \\ u &= -\alpha \text{sign} \left\{ \ddot{\ddot{s}} + 3(\ddot{s}^6 + \dot{s}^4 + |s|^3)^{\frac{1}{12}} \text{sign}[\ddot{s} + (\dot{s}^4 + |s|^3)^{\frac{1}{6}} \text{sign}(\dot{s} + 0.5|s|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(s))] \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le principe de base de cette technique développé par [Lev99] est d'établir un régime glissant d'ordre un sur les parties lisses de l'ensemble de discontinuité  $\Gamma$  de (2.33). Ce mode de glissement est décrit par l'équation différentiel  $\bar{w}_{r-1,r} = 0$ , qui donne à son tour l'existence d'un mode glissant d'ordre un. Mais le mode de glissement primaire disparaît au moment où le secondaire apparaît. Le mouvement résultant a lieu dans un certain voisinage du sous-ensemble  $\Gamma$  satisfaisant  $\bar{w}_{r-2,r} = 0$ . Puis il les transfère en un temps fini dans un voisinage du sous-ensemble  $\Gamma$  satisfaisant  $\bar{w}_{r-3,r} = 0$ , et ainsi de suite. Pendant que la trajectoire s'approche de l'ensemble  $r$ -glissant, l'ensemble  $\Gamma$  se rétracte à l'origine dans les coordonnées  $s, \dot{s}, \dots, s^{r-1}$  (voir figure (2.4)).

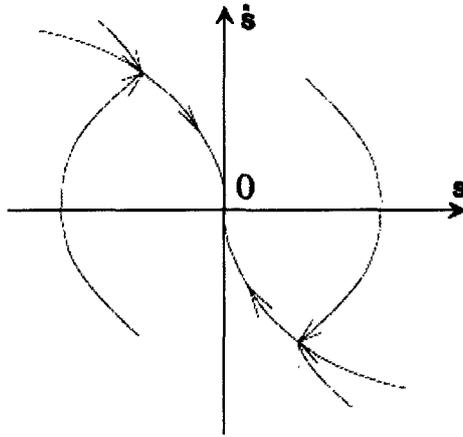


Figure 2.4 : Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme de convergence prédefinie

### 2.4.5 Algorithme sous-optimal

Une classe d'algorithmes CMGOD tirée d'une généralisation de l'algorithme "sous-optimal" [BPPU03], peut être définie par la loi de commande suivante [BFI<sup>+</sup>06] :

$$v(t) = -\alpha(t)U_M \text{sign} [y_1(t) - \beta y_{1_M}(t)] \quad (2.35)$$

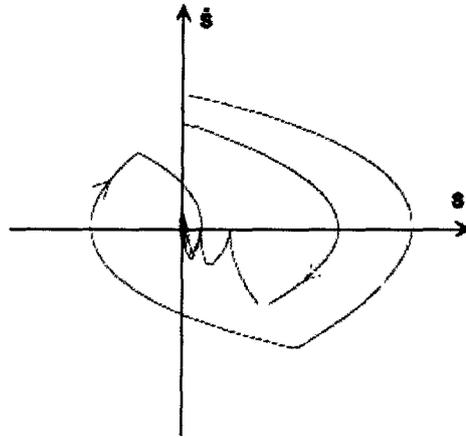
avec :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^* & \text{si } y_{1_M}(t) [y_1(t) - \beta y_{1_M}(t)] \geq 0 \\ 1 & \text{si } y_{1_M}(t) [y_1(t) - \beta y_{1_M}(t)] < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $y_{1_M}(t)$  représente la dernière valeur singulière de la fonction  $y_1(t)$  (c'est à dire la plus récente valeur  $y_1(t_{M_i})$  tel que  $\dot{y}_1(t_{M_i}) = 0$ ).  $U_M$  est l'effort minimum de commande,  $\beta \in [0, 1)$  est le paramètre d'anticipation et  $\alpha^* \geq 1$  est le paramètre de modulation. Alors la loi de commande (2.35) avec les conditions suffisantes de convergence :

$$\begin{cases} U_M > \frac{C_0}{\lambda_m} \\ \alpha^* \in [1; +\infty) \cap \left( \frac{2C_0 + (1-\beta)\lambda_m U_M}{(1+\beta)\lambda_m U_M}; +\infty \right) \end{cases} \quad (2.37)$$

impose un mode de glissement d'ordre deux sur la surface de glissement  $y_1(t) = 0$  [BPPU03]. Cet algorithme est caractérisé par trois paramètres de réglage. Un réglage spécial de la commande (2.35) donne l'algorithme de "twisting" [Lev93] ( $\beta = 0$ ) et la commande relais ( $\beta = 0, \alpha^* = 1$ ). Dans l'algorithme "sous-optimal" classique [BFU97] (stabilité



**Figure 2.5 :** Trajectoire dans le plan de phase de l'algorithme sous-optimal

semi-globale) on a  $\beta = \frac{1}{2}$ , tandis que la version globale de l'algorithme [BPU01] est basée sur l'ajustement en ligne de  $\beta$ .

## 2.5 Différentiateur robuste via modes glissants d'ordre supérieur

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser brièvement à l'étude d'un nouvel algorithme de dérivation numérique via les modes glissants, en particulier, un différentiateur robuste en temps réel, basé sur l'algorithme de Super-twisting [Lev98]. Il est utilisé pour garantir une meilleure estimation de la dérivation de  $s$ . Soit une fonction  $s(t)$  définie sur  $[0, \infty[$ . Supposons que cette fonction possède une dérivée ayant une constante de Lipschitz  $C > 0$ .

Considérons l'équation auxiliaire suivante :

$$\dot{x} = u \tag{2.38}$$

Définissons les équations dynamiques des erreurs d'estimation données par :

$$\sigma_1 = x - s(t) \tag{2.39}$$

$$\sigma_2 = \dot{\sigma}_1 = u - \dot{s}(t) \tag{2.40}$$

Pour réaliser la différentiation de  $s$  en temps réel, on utilise le différentiateur robuste suivant [Lev01] :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ u &= u_1 - \alpha_0 |x - s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x - s) \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_1 \text{sign}(x - s)\end{aligned}\quad (2.41)$$

où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des constantes positives.  $x$  est l'estimation de  $s$  et  $u$  est l'estimation de  $\dot{s}$ .

Les paramètres  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont choisis de telle manière à satisfaire les conditions de convergence de  $u(t)$  vers  $\dot{s}$

$$\alpha_1 > C \quad \alpha_0^2 \geq 4C \frac{\alpha_1 + C}{\alpha_1 - C} \quad (2.42)$$

On peut obtenir après bouclage la convergence de  $\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = 0$  en un temps fini. Donc :

$$\begin{cases} \sigma_1 = x - s = 0 \\ \sigma_2 = \dot{\sigma}_1 = u - \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

L'estimation obtenue  $u = \dot{s}$  est ensuite utilisée pour déterminer la commande par mode de glissement d'ordre deux (algorithme de twisting)(2.23).

La figure 2.6 présente le schéma de principe du différentiateur robuste.

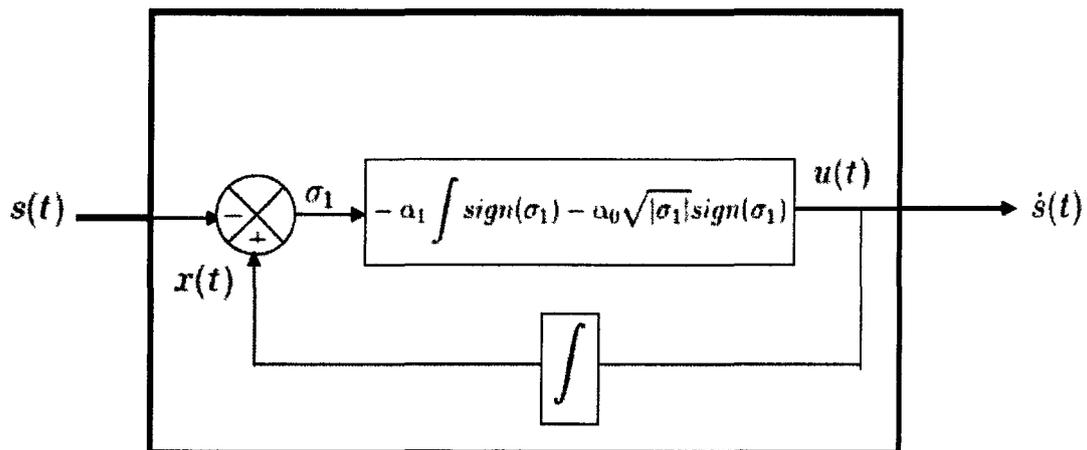


Figure 2.6 : Schéma de principe du différentiateur robuste

## 2.6 Application de la commande par mode de glissement d'ordre deux

Dans ce paragraphe nous présentons une application sur le banc d'essai présenté au premier chapitre section 1.4.1. Nous allons appliquer les différents algorithmes proposés dans ce chapitre sur les deux colonnes  $T_1$  et  $T_3$ . La colonne  $T_2$  est utilisée comme perturbation extérieure (voir figure 1.15)[BCABC09b, BCABC09c].

### 2.6.1 Algorithme du twisting

#### 2.6.1.1 Synthèse de la commande

Pour élaborer cette loi de commande, le degré relatif peut être égal à un ou deux. Dans notre cas, nous avons choisi une surface de glissement de telle sorte que le degré relatif du système soit égale à un par rapport à cette surface. L'algorithme de commande twisting est appliqué à la dérivée de la commande ( $\dot{u}$ ) :

$$s = (\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) + \lambda_t(x_2 - x_{2d}) \quad (2.44)$$

Le modèle utilisé dans cette section est donné dans (1.100).  $x_2$  est la sortie du système,  $x_{2d}$  représente le niveau de la colonne  $T_3$  souhaité et  $\lambda_t$  est un paramètre positif.

L'objectif est de générer un régime glissant d'ordre deux sur l'ensemble de glissement d'ordre deux donné par les égalités  $s = \dot{s} = 0$ . La dérivée seconde de  $s$  peut être écrite comme suit :

$$\ddot{s} = F(x_i, \dot{x}_i) + G(x_i, \dot{x}_i)\dot{u}, \quad i = 1, 2 \quad (2.45)$$

avec :

$$F(\cdot) = \frac{C_1 B_2}{2} \left( \frac{(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\sqrt{x_1 - x_2}}{x_1 - x_2} - \frac{(2x_2 - x_1)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{2(x_1 - x_2)^{3/2}} \right) + \frac{C_1}{2A} \frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{2\sqrt{x_1 - x_2}} u - \lambda_t \left( \frac{C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{2\sqrt{x_1 - x_2}} - \frac{B_2 \dot{x}_2}{2\sqrt{x_2}} + \ddot{x}_{2d} \right) - \ddot{x}_{2d} + \dot{w} + \ddot{w} = \hat{F} + \Delta F \quad (2.46)$$

$$G(\cdot) = \frac{C_1}{2A} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} = \hat{G} + \Delta G \quad (2.47)$$

$\hat{F}$  et  $\hat{G}$  sont les expressions nominales connues. Les expressions  $\Delta F$  et  $\Delta G$  représentent les incertitudes dues aux variations de paramètres et aux perturbations extérieures  $w$ . Le

terme  $w$  doit être borné ainsi que ses dérivées première et seconde. La commande finale utilisant le retour d'état statique [LSBP04], est donnée par :

$$\dot{u} = \hat{G}^{-1}(-\hat{F} + v) \quad (2.48)$$

Le scalaire  $\hat{G}$  ne pouvant jamais être égal à 0, la commande d'entrée  $u$  est toujours définie.  $v$  est considérée comme la nouvelle entrée du système. Dans ce cas l'équation (2.45) s'écrit :

$$\ddot{s} = \left( \Delta F - \frac{\Delta G}{\hat{G}} \hat{F} \right) + \left( 1 + \frac{\Delta G}{\hat{G}} \right) v \quad (2.49)$$

Supposons que les fonctions suivantes sont bornées telles que :

$$0 < K_m < \left( 1 + \frac{\Delta G}{\hat{G}} \right) \leq K_M \quad (2.50)$$

et

$$\left| \Delta F - \frac{\Delta G}{\hat{G}} \hat{F} \right| < C_0 \quad (2.51)$$

avec  $K_m$ ,  $K_M$  et  $C_0$  des constantes positives.

On suppose que  $x_1$ ,  $x_2$  sont bornés, et  $|\Delta F| < F$ ,  $|\Delta G| < G$ . Dans ce cas la loi de commande est donnée par :

$$v = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} > 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

où  $\lambda_m$ ,  $\lambda_M$ , sont des constantes positives qui satisfont les conditions suivantes :

$$0 < \lambda_m < \lambda_M, \quad \lambda_m > \frac{C_0}{K_m} \quad (2.53)$$

$$K_m \lambda_m - C_0 > K_M \lambda_m + C_0 \quad (2.54)$$

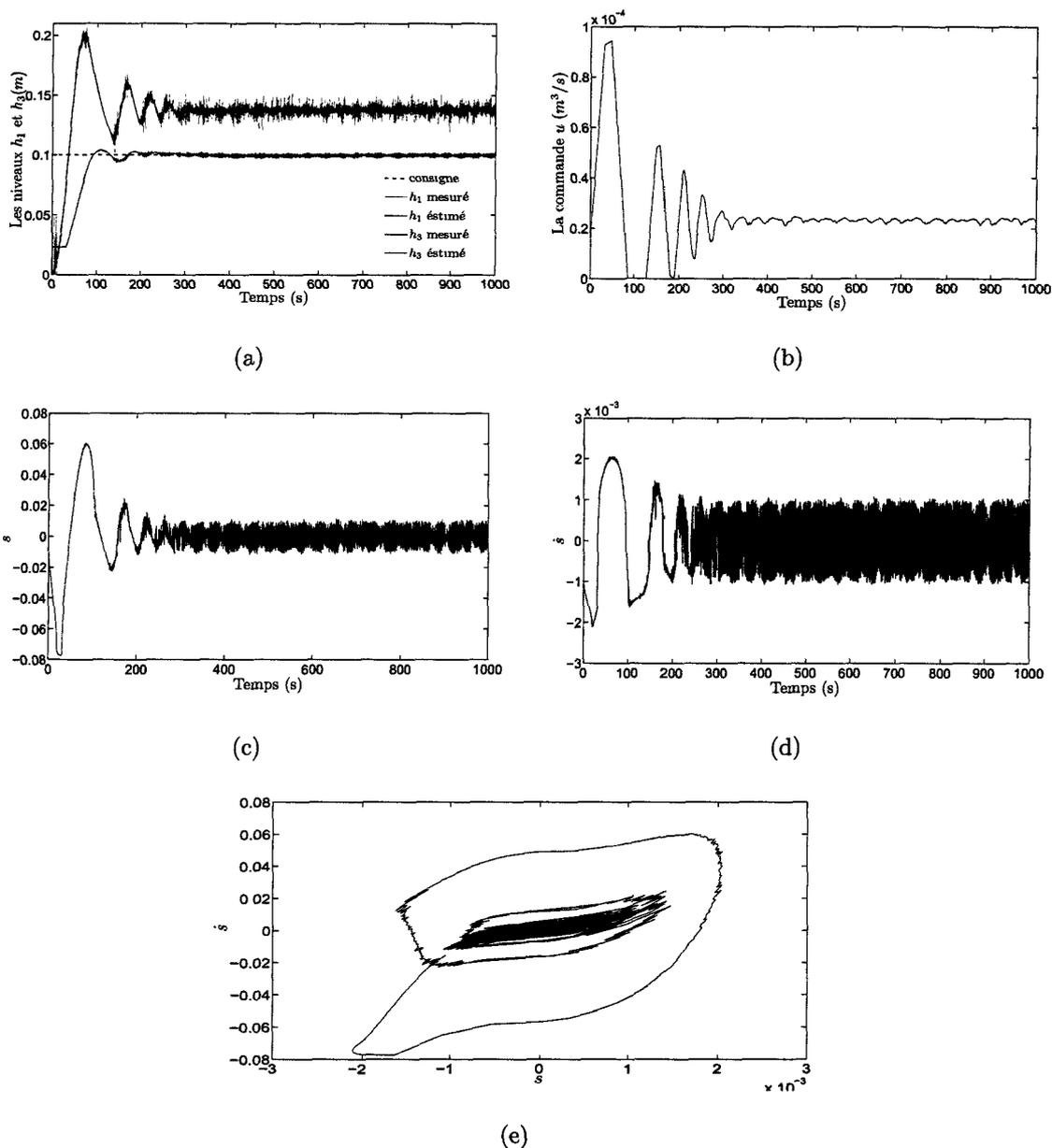
Pour la mise en œuvre de la CMGOS en utilisant l'algorithme de twisting (2.52), nous avons besoin de la dérivée  $\dot{s}$ . Pour ce faire et pour avoir une dérivée de qualité malgré la présence de bruit, on utilise le différentiateur robuste détaillé dans la section 2.5.

### 2.6.1.2 Résultats expérimentaux

Deux types d'essais ont été utilisés pour valider la loi de commande préposée : un premier essai sans perturbation (figure 2.7) puis un second avec l'introduction d'une perturbation extérieure à  $t = 500s$  (figure 2.8).

## a) Suivi avec une commande dynamique

Les résultats suivants ont été obtenus par le logiciel Matlab/Simulink en utilisant l'interface à temps réel DSPACE(DS1102).



**Figure 2.7 :** Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste

La figure 2.7 présente dans l'ordre les niveaux  $h_1$  et  $h_3$ , la commande  $u$ , la surface et sa dérivée, et le plan de phase ( $s, \dot{s}$ ). Les valeurs numériques utilisées pour les expérimentations

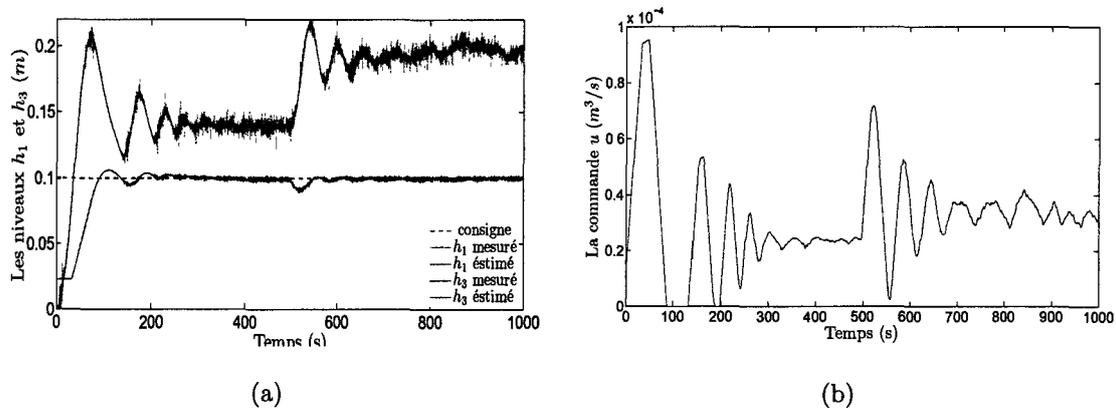
sont les suivantes :  $\lambda_m = 1,6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_M = 0,65 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_0 = 0.01$ ,  $\alpha_1 = 10^{-4}$  et  $\lambda_t = 50$ . Pour le premier test expérimental, la vanne  $V_{a_{z_3}}$  est fermée. La figure 2.7(a) montre le suivi de la référence par le niveau du liquide dans la colonne 2.

Ces résultats expérimentaux montrent que la réponse du niveau  $h_2$  suit bien sa référence. Le temps de réponse observé est de 90s, On remarque que la commande oscille au départ pour se stabiliser aux bout d'un certain temps. Cela est dû à la nature de convergence de l'algorithme de twisting. Les figures 2.7(c) et 2.7(d) présentent respectivement la surface et sa dérivée obtenues par un différentiateur robuste. On peut constater à partir de la figure 2.7(b) que la commande n'est pas affectée par le phénomène de chattering.

Sur les figures 2.7(e) et 2.9(c), nous avons illustré les trajectoires du système dans le plan de phase  $(s, \dot{s})$ . Ces courbes montrent que la loi de commande est caractérisée par un mouvement en spirale convergeant vers l'origine.

### b) Tests de robustesse

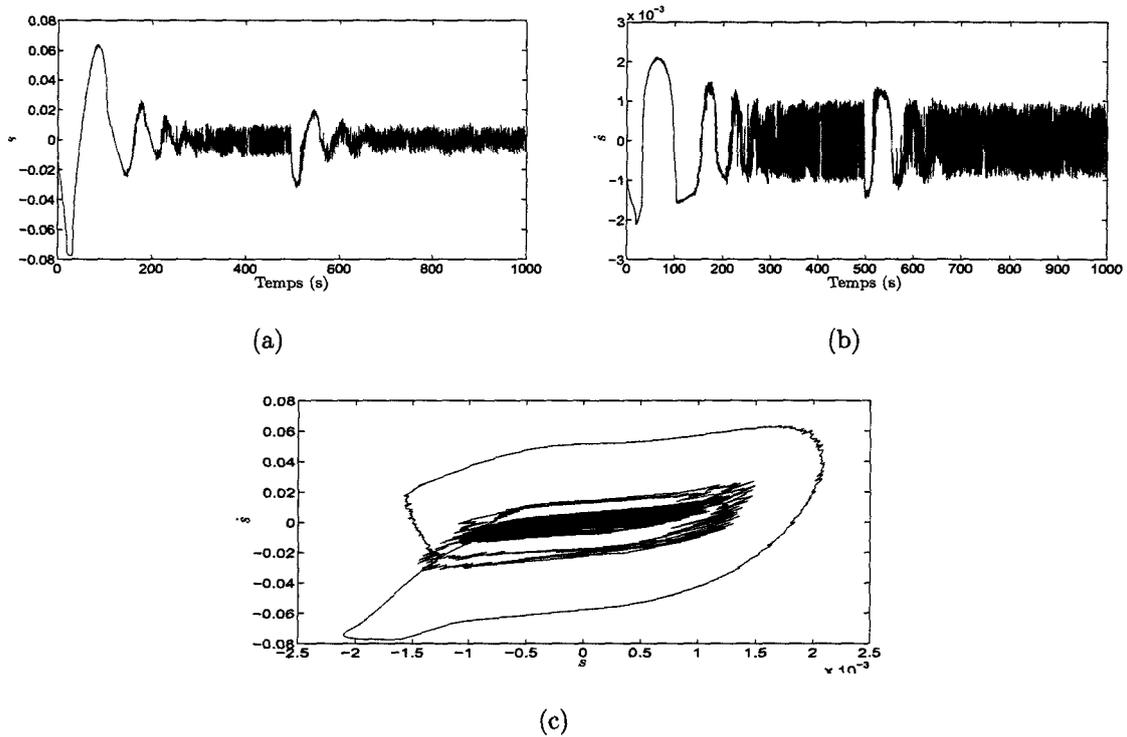
Pour montrer la robustesse du système commandé face aux perturbations agissant sur le système, nous introduisons une fuite d'amplitude  $0.5 \cdot 10^{-4} m^3/s$  dans le deuxième réservoir (figure 2.8). On peut observer à partir des réponses (figure 2.8(a)) que la sortie converge



**Figure 2.8 :** Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste- système perturbé

vers sa référence. La figure 2.8(b) montre comment la commande réagit pour maintenir la sortie sur la référence. Par conséquent, il peut être conclu que la CMGOD utilisant l'algorithme de twisting est robuste face à des perturbations agissant sur le processus. Les résultats présentés sont obtenus sans modifier la valeur des paramètres de la commande.

À partir de ces résultats expérimentaux (figure 2.9), nous pouvons conclure que le différentiateur



**Figure 2.9 :** Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de twisting combiné avec un différentiateur robuste- système perturbé

utilisant le mode de glissement permet d'assurer un meilleur calcul de  $\dot{s}$  en temps réel. Cette estimation assure une bonne précision en terme de suivi d'une trajectoire désirée.

## 2.6.2 Algorithme du super-twisting

### 2.6.2.1 Synthèse de la commande

L'algorithme de twisting exposé précédemment nécessite la connaissance de la dérivée de la surface de glissement. Cependant, une autre solution consiste alors en la synthèse d'un algorithme par modes glissants d'ordre deux qui nécessite uniquement la connaissance de  $s$ . Il en existe très peu dans la littérature. On peut citer par exemple l'algorithme dit sous-optimal [BPPU03]. Cependant, celui-ci requiert une évaluation précise en temps réel de la valeur singulière de la variable de glissement  $s$ , c'est à dire la valeur correspondant au passage par zéro de la fonction  $\dot{s}$ . Nous avons donc choisi d'appliquer l'algorithme de super-twisting sur le système de 3 colonnes. Le degré relatif du système (1.100) est égal à deux. Afin de faire apparaître l'entrée  $u(t)$  de manière explicite dans la dérivée de la

surface de glissement, l'ordre du système nous impose le choix d'une surface décrite par l'équation suivante :

$$s = \dot{\tilde{x}}_2 + \lambda_{st}\tilde{x}_2 \quad (2.55)$$

Soit  $x_{2d}$  la référence à suivre,  $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - x_{2d}(t)$  l'erreur de suivi et  $\lambda_{st}$  est un paramètre positif. La surface  $s$  est de degré relatif un, avec :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_{2d}) + \lambda_{st}(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) \\ &= a_{st} + b_{st}u \end{aligned} \quad (2.56)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{st} &= -C_1^2 + \frac{B_3^2}{2} + \frac{C_1 B_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \lambda_{st}(C_1\sqrt{x_1 - x_2} - B_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) - \ddot{x}_{2d} - \ddot{x}_{2d} \\ &= \hat{a}_{st} + \tilde{a}_{st} \\ b_{st} &= \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} = \hat{b}_{st} + \tilde{b}_{st} \end{aligned}$$

Les calculs détaillés dans ce paragraphe ont été obtenus en utilisant le modèle décrit dans l'équation (1.100)  $\hat{a}_{st}$  et  $\hat{b}_{st}$  sont les expressions nominales.  $\tilde{a}_{st}$  et  $\tilde{b}_{st}$  sont des termes contenant toutes les incertitudes :

$$\hat{a}_{st} = \left[ -\hat{C}_1^2 + \frac{\hat{B}_3^2}{2} + \frac{\hat{C}_1 \hat{B}_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \lambda_{st}(\hat{C}_1\sqrt{x_1 - x_2} - \hat{B}_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) - \ddot{x}_{2d} \right] \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{st} &= -\tilde{C}_1^2 - 2\tilde{C}_1\hat{C}_1 + \frac{\tilde{B}_3^2}{2} + \tilde{B}_3\hat{B}_3 + \lambda_{st}\tilde{C}_1\sqrt{x_1 - x_2} + \frac{\tilde{B}_3\hat{C}_1 + \tilde{C}_1\tilde{B}_3 + \hat{B}_3\tilde{C}_1}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} \\ &\quad - \lambda_{st}\tilde{B}_3\sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\hat{b}_{st} = \frac{\hat{C}_1}{2A} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} \quad (2.59)$$

$$\tilde{b}_{st} = \frac{\tilde{C}_1}{2A} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} \quad (2.60)$$

La commande finale est donnée par :

$$u = \hat{b}_{st}^{-1}[-\hat{a}_{st} + v] \quad (2.61)$$

$v$  est considérée comme la nouvelle entrée du système. Dans ce cas l'équation (2.56) s'écrit :

$$\dot{s} = \left( \tilde{a}_{st} - \frac{\tilde{b}_{st}}{\hat{b}_{st}} \hat{a}_{st} \right) + \left( 1 + \frac{\tilde{b}_{st}}{\hat{b}_{st}} \right) v \quad (2.62)$$

L'algorithme de super-twisting a été développé pour la commande de système de degré relatif un dans le but d'éliminer le phénomène de réticence. Dans ce cas, la loi de commande est formulée par deux termes : le premier est défini par la dérivée temporelle de sa discontinuité et le deuxième est une fonction continue de la variable de glissement  $s$  :

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{v}_1 = -\alpha_3 \text{sign}(s) \\ v_2 = -\alpha_4 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \end{cases} \quad (2.63)$$

Les paramètres  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont déterminés de telle manière à satisfaire les conditions de convergence en temps fini sur l'ensemble de glissement  $\{s = \dot{s} = 0\}$  (2.29). L'application de la commande (2.61) permet la convergence en un temps fini de l'erreur  $\tilde{x}_2$  vers zéro en évitant le phénomène de réticence.

### 2.6.2.2 Résultats expérimentaux

Les mêmes essais que pour la commande précédente ont été réalisés de manière à pouvoir comparer les résultats (figures 2.10 et 2.11). Les mesures sont bruitées et les

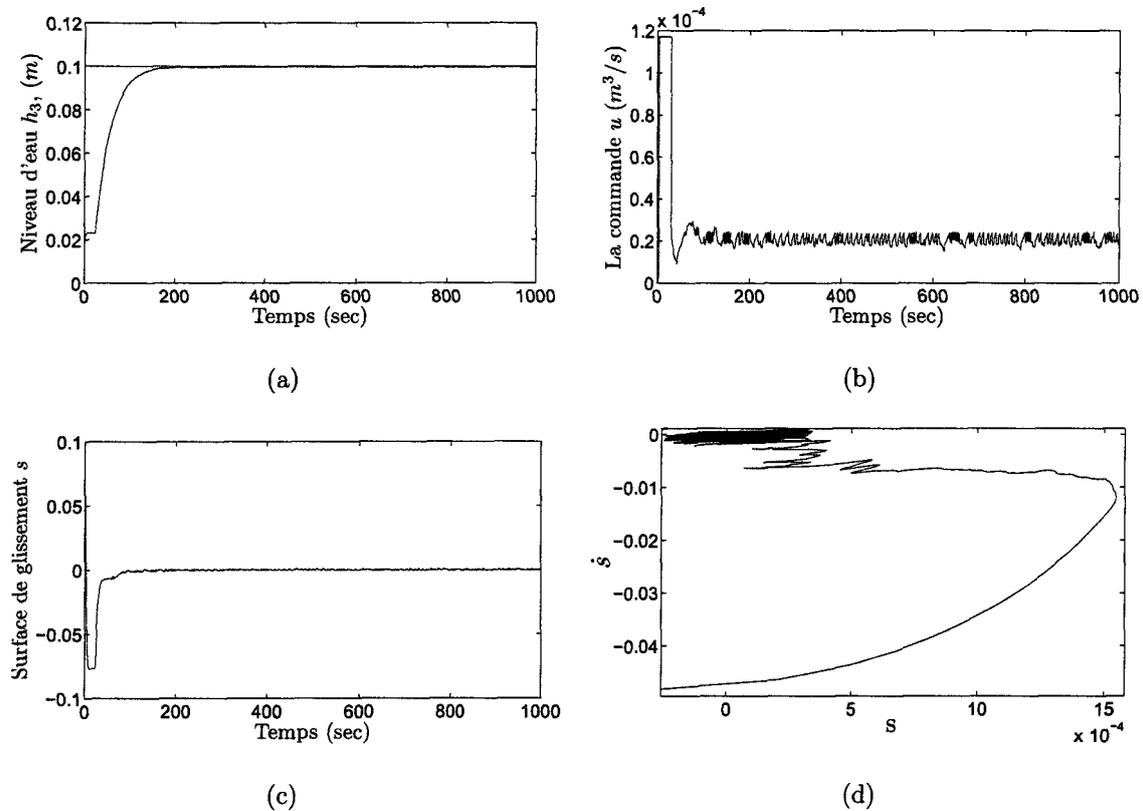
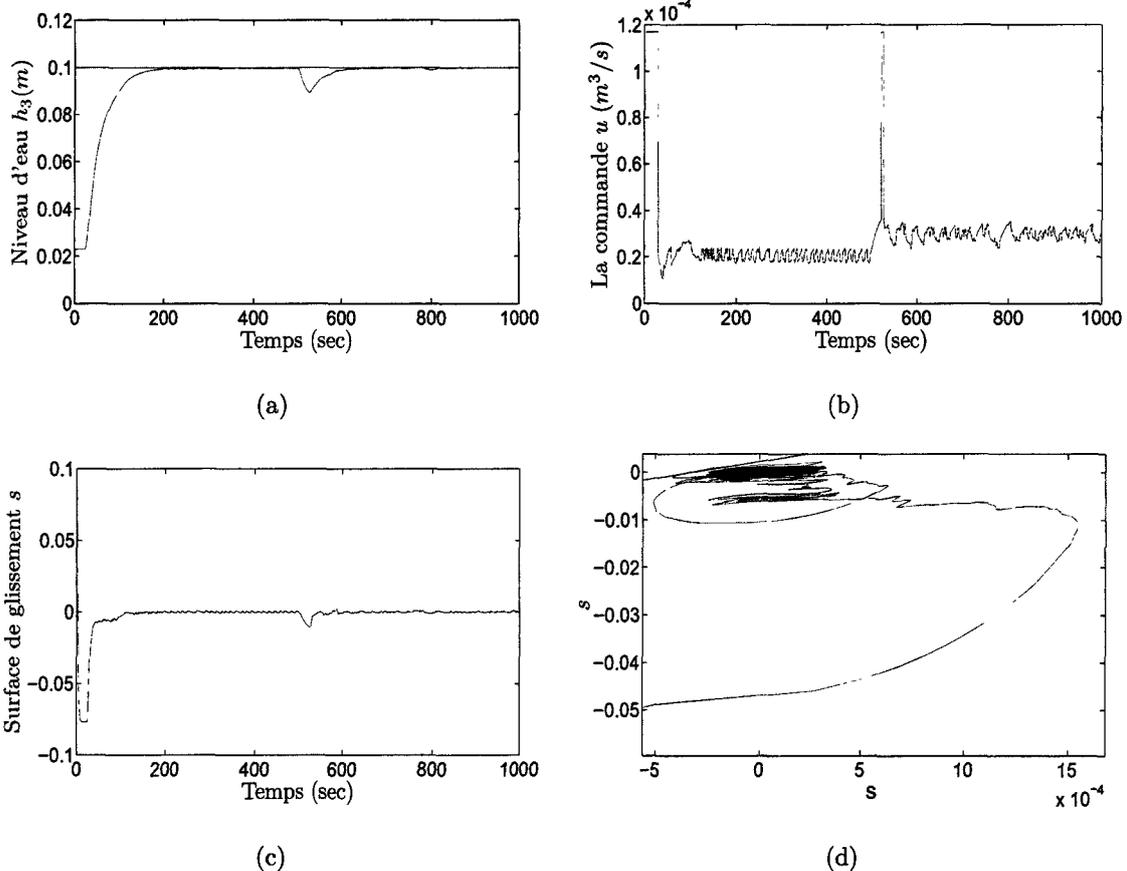


Figure 2.10 : Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de super twisting

paramètres  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\rho$  et  $\lambda_{st}$  sont respectivement choisis égaux à  $3.5 \cdot 10^{-4}$ , 0.005, 0.5 et 30. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures (2.10). Ces courbes montrent bien que l'erreur est très faible. De plus, il est clair qu'en régime statique, le niveau est mieux stabilisé qu'avec l'algorithme par mode de glissement d'ordre un. La commande n'est ni chahutée ni saturée. La figure (2.11) présente les résultats expérimentaux lorsqu'une fuite est introduite dans la deuxième colonne. Comme dans le cas de l'algorithme de twisting, les résultats sont assez satisfaisants, l'erreur ne dépasse pas 0.01.



**Figure 2.11** : Résultats expérimentaux obtenus en utilisant l'algorithme de super twisting en présence de variations paramétriques et des perturbations extérieures

L'avantage de cet algorithme n'est pas seulement l'atténuation de broutement, mais aussi sa robustesse pour des systèmes incertains. De plus cet algorithme ne nécessite aucune connaissance de la dérivée de la variable de glissement  $s$ , ce qui nous permet d'éviter le problème de la dérivée numérique.

## 2.7 Conclusion

Les deux algorithmes présentés dans ce chapitre permettent la commande des systèmes non linéaires incertains, en particulier les systèmes hydrauliques. La commande fondée sur l'algorithme de twisting et utilisant un différentiateur robuste est décrite dans la première partie du chapitre. La commande par mode de glissement d'ordre supérieur fondée sur l'algorithme de super-twisting est présentée dans la seconde partie.

La validation expérimentale de ces algorithmes pour la commande du système à trois colonnes a permis de montrer l'applicabilité effective de ces stratégies. Pour des niveaux de perturbations importantes et semblables à celles introduites au chapitre précédent, les résultats expérimentaux ont montré la robustesse et la convergence en un temps fini de l'algorithme de twisting et la faisabilité du différentiateur robuste pour la commande du système hydraulique de 3 colonnes. Nous avons montré que la commande par super twisting est plus simple à implanter, en effet, elle ne nécessite pas la connaissance de la dérivée de la surface de glissement. On note cependant que le réglage du paramètre  $\alpha_4$  (gain de glissement) n'est pas aisé. Il nécessite de trouver un compromis entre le temps de convergence et l'amplitude du broutement.

Des solutions pour y palier peuvent être proposées comme perspective : régler le gain en utilisant des techniques de commande comme la logique flou ; rendre le gain de glissement adaptatif face aux incertitudes et aux perturbations extérieures. Nous présentons au chapitre 4 une nouvelle approche qui consiste à combiner le backstepping classique avec l'algorithme de super twisting.



# Chapitre 3

## Théories et Application de la Commande par backstepping adaptatif

### Introduction

La technique de backstepping a été largement explorée dans le but de rechercher de procédures récursives pour la mise au point de lois de commande des systèmes non linéaires. Parmi les nombreux travaux sur cette technique, on peut notamment citer ([KKM91],[KKK95],[FK93, FK96], [Kha96, Kha01], [SJK97],[ASBK00],[EPK00].

Des applications à des procédés ont aussi été présentées dans la littérature. A titre indicatif, citons pour le domaine de l'hydraulique [AL00], [PWKQ05], [LK05], [UUP06] de l'électrique [DCS94], [XLJW98], [LL00], [ZW05], du magnétique [DD96], [YM01] de la robotique [JN97], [JJN01], [LSLT01], [ZLG97]. Ces techniques relativement bien connues sont essentiellement basées sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov pour l'étude de la stabilité. L'objectif est de trouver une loi de commande qui rend la dérivée d'une fonction de Lyapunov, choisie a priori, définie ou semi-définie négative. La principale difficulté réside alors dans le choix d'une fonction de Lyapunov convenable. La technique du backstepping surmonte cette difficulté en construisant itérativement une fonction de Lyapunov adaptée au système, et permet de déduire la commande qui rend la dérivée de cette fonction définie ou semi-définie négative.

Dans leur ouvrage [KKK95], Krstic et al. ont développé un cadre théorique pour l'application de backstepping adaptatif en présence de perturbations lentement variables. Quand un système évolue au milieu d'éléments perturbateurs difficiles à modéliser, le contrôle adaptatif consiste à estimer les paramètres inconnus en ligne et à intégrer l'estimation de ces paramètres à la commande.

Le backstepping représente une alternative intéressante aux méthodes basées sur l'équivalence certaine [Ben00]. Le principe est basé sur la deuxième méthode de Lyapunov, il combine le choix de la fonction avec celui des lois de commande et d'adaptation. Ceci lui permet, en plus de la tâche pour laquelle le contrôleur est conçu (poursuite et/ou régulation), de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système.

Dans la première partie du chapitre, nous présentons les concepts de base de la commande par la technique du backstepping. La théorie de la commande adaptative des systèmes non linéaires incluant la technique du backstepping est décrite. L'association des deux aspects, traduits en termes d'algorithme, sont appliqués à la commande d'un système hydraulique à trois cuves. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des performances en temps réel du contrôleur adaptatif non-linéaire élaboré. Ce contrôleur permet d'appliquer la version adaptative du backstepping sur un système qui n'est pas sous forme triangulaire (système de 3 colonnes) et réduit en même temps le "surparamétrage". Ses performances sont comparées à celles d'un contrôleur non linéaire du backstepping classique.

### 3.1 Principe de la technique du backstepping

La technique de backstepping, appelée aussi ajout d'intégrateur, introduite par Byrnes et Isidori [Cor92], Kolesnikov [Kol87], Tsiniias [Tee92], Coron et Praly [CP91], est devenue l'une des méthodes de base de construction de lois de commande stabilisantes. Les avantages inhérents à cette technique sont bien connus. Krstic a démontré en 1995 que cette méthode enveloppe une grande famille de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes et permet de résoudre diverses difficultés liées à la robustesse et à la commande adaptative [KKK95].

Considérons le système décrit par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0 \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état et  $u \in \mathbb{R}$  l'entrée de commande.

On suppose qu'il existe une loi de commande connue continûment différentiable :

$$u = \alpha(x), \quad \alpha(0) = 0 \quad (3.2)$$

Cette condition assure que  $x = 0$  est bien un point d'équilibre du système (3.1). Et supposons qu'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  régulière, définie positive telle que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\alpha(x)] \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

où  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue et définie ou semi-définie positive.

À partir de ces deux hypothèses (3.2) et (3.3), nous pouvons conclure que le système est globalement borné.

Considérons maintenant le système (3.1) augmenté par un intégrateur pur, figure 3.1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\zeta \\ \dot{\zeta} = u \end{cases} \quad (3.4)$$

En additionnant et en retranchant  $g(x)\alpha(x)$  à la première équation de (3.1), il vient :

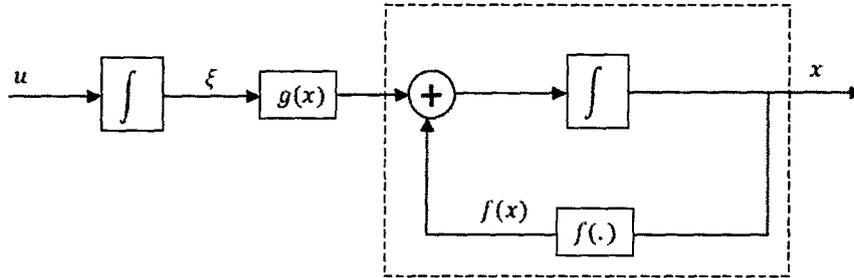


Figure 3.1 : Schéma bloc du système (3.4).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)(\zeta - \alpha(x)) \\ \dot{\zeta} = u \end{cases} \quad (3.5)$$

On considère le système (3.5) et on définit la nouvelle variable d'erreur :

$$z = \zeta - \alpha(x) \quad (3.6)$$

qui représente l'écart entre la commande virtuelle  $\zeta$  et la fonction stabilisante  $\alpha(x)$ .

Ce changement de variable conduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)(\alpha(x) + z) \\ \dot{z} = u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)(\alpha(x) + z)] \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système ci-dessus est représenté par le schéma bloc (figure 3.2). La fonction candidate

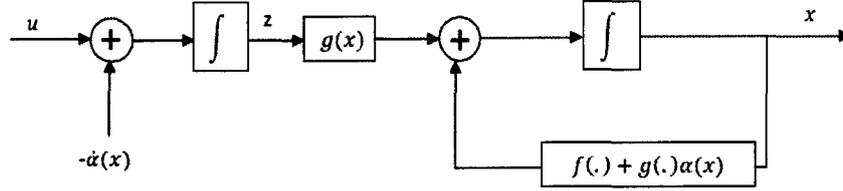


Figure 3.2 : Principe de la technique du backstepping.

de Lyapunov pour le système complet est alors choisie de la manière suivante :

$$V_a(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}z^2 \quad (3.8)$$

Il vient, après dérivation :

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x, z) &= \frac{\partial V}{\partial x}(f + g\alpha + gz) + z[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g(\alpha + z))] \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(f + g\alpha) + z[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g(\alpha + z)) + \frac{\partial V}{\partial x}g] \\ &\leq -W(x) + z[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g(\alpha + z)) + \frac{\partial V}{\partial x}g] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si nous choisissons :

$$u = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g(\alpha + z)) - \frac{\partial V}{\partial x}g - cz, \quad c > 0 \quad (3.10)$$

Nous obtenons :

$$\dot{V}_a \leq -W(x) - cz^2 = -W_a(x, z) \leq 0 \quad (3.11)$$

Si  $W(x)$  est définie positive, la commande  $u$  assure les objectifs de stabilité et de performance asymptotique.

## 3.2 Synthèse récursive par Backstepping

### 3.2.1 Cas des systèmes sous forme "strict-feedback"

Dans cette section, nous nous intéressons à une classe de systèmes non linéaires sous forme "strict feedback" [KKK95]. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)\zeta_1 \\
 \dot{\zeta}_1 &= f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2 \\
 \dot{\zeta}_2 &= f_2(x, \zeta_1, \zeta_2) + g_2(x, \zeta_1, \zeta_2)\zeta_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_{k-1} &= f_{k-1}(x, \zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}) + g_{k-1}(x, \zeta_1, \dots, \zeta_{k-1})\zeta_k \\
 \dot{\zeta}_k &= f_k(x, \zeta_1, \dots, \zeta_k) + g_k(x, \zeta_1, \dots, \zeta_k)u
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  sont des fonctions scalaires. Nous supposons par ailleurs que le système admet l'origine comme état d'équilibre ( $f, f_1, \dots, f_k$  s'annulent à l'origine).

Pour commencer la procédure récursive par backstepping, nous considérons, tout d'abord, le sous système suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)\zeta_1 \\
 \dot{\zeta}_1 &= f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

On désire trouver la loi de commande virtuelle  $\alpha_1(x, \zeta_1)$  qui assure la stabilité de l'origine du système (3.13). Pour ce faire, on prend comme Fonction de Contrôle de Lyapunov (FCL), la forme quadratique :

$$V_1(x) = V(x) + \frac{1}{2}[\zeta_1 - \alpha(x)]^2 \tag{3.14}$$

qui est définie positive. En utilisant (3.13), sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_1 = \dot{V} + z\dot{z}, \quad z = \zeta_1 - \alpha(x) \tag{3.15}$$

Nous avons :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(f + g\alpha) + \frac{\partial V}{\partial x}gz \tag{3.16}$$

$$\dot{z} = f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f(x) + g(x)\zeta_1) \tag{3.17}$$

En substituant (3.16) et (3.17) dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial x}(f + g\alpha) + \frac{\partial V}{\partial x}g(\zeta_1 - \alpha) + (\zeta_1 - \alpha) \left[ f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f(x) + g(x)\zeta_1) \right] \\ &\leq -W(x) + [\zeta_1 - \alpha(x)] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\zeta_1] \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En additionnant et en retranchant  $g_1(x, \zeta_1)\alpha_1(x, \zeta_1)$ , à l'inéquation (3.18), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -W(x) + [\zeta_1 - \alpha(x)] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\alpha_1(x, \zeta_1) \right. \\ &\quad \left. + g_1(x, \zeta_1)[\zeta_2 - \alpha_1(x, \zeta_1)] - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\zeta_1] \right\} \\ &= -W_1(x, \zeta_1) + \frac{\partial V_1}{\partial \zeta_1}(x, \zeta_1)g_1(x, \zeta_1)[\zeta_2 - \alpha_1(x, \zeta_1)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le choix de la loi de commande stabilisante :

$$\zeta_2 = \alpha_1(x, \zeta_1) = \frac{1}{g_1(x, \zeta_1)} \left\{ -c_1[\zeta_1 - \alpha(x)] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) - f_1(x, \zeta_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\zeta_1] \right\} \quad (3.20)$$

où  $c_1 > 0$ , permet de rendre  $\dot{V}_1$  négative. En effet avec un tel choix, on a :

$$\dot{V}_1 = -W(x) - c_1(\zeta_1 - \alpha_1)^2 \quad (3.21)$$

Après avoir déterminé la fonction stabilisante  $\alpha_1(x, \zeta_1)$ , notre prochaine étape consiste à augmenter le sous système (3.13) par la troisième équation du système (3.12), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = f_1(x, \zeta_1) + g_1(x, \zeta_1)\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = f_2(x, \zeta_1, \zeta_2) + g_2(x, \zeta_1, \zeta_2)\zeta_3 \end{cases} \quad (3.22)$$

Le système (3.22) peut être reformulé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1) + G_1(X_1)\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = f_2(X_1, \zeta_2) + g_2(X_1, \zeta_2)\zeta_3 \end{cases} \quad (3.23)$$

avec

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \quad F_1(X_1) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\zeta_1 \\ f_1(x, \zeta_1) \end{bmatrix}, \quad G_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(x, \zeta_1) \end{bmatrix}$$

Cela permet d'obtenir la fonction stabilisante suivante :

$$\alpha_2(x, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{g_2} \left[ -c_1(\zeta_2 - \alpha_1) - \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} g_1 - f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} (f + g \zeta_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} (f_1 + g_1 \zeta_2) \right] \quad (3.24)$$

où  $c_1$  est une constante positive.

La fonction de Lyapunov est donnée dans ce cas là par :

$$V_2(x, \zeta_1, \zeta_2) = V_1(x, \zeta_1) + \frac{1}{2} [\zeta_2 - \alpha_1(x, \zeta_1)]^2 \quad (3.25)$$

L'application récursive du backstepping permet l'extension de la procédure de conception aux systèmes triangulaires d'ordre "k" (3.12).

Les différentes fonctions de Lyapunov sont données par :

$$\begin{aligned} V_k(x, \zeta_1, \dots, \zeta_k) &= V_{k-1}(X_{k-1}) + \frac{1}{2} [\zeta_k - \alpha_{k-1}(X_{k-1})]^2 \\ &= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\zeta_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1})]^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si la condition de singularité

$$g_k(x, \zeta_1, \dots, \zeta_k) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \zeta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$$

est satisfaite, alors la commande  $u$  qui permet d'atteindre les objectifs de la conception pour le système global, est donnée par :

$$u = \frac{1}{g_k} \left[ \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \zeta_k) - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \zeta_k} g_{k-1} - c_k (\zeta_k - \alpha_{k-1}) - f_k \right] \quad (3.27)$$

avec  $c_k > 0$ .

### 3.2.2 Exemple

Afin d'illustrer le principe de la méthode récursive par backstepping, on considère le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3 + u \end{cases} \quad (3.28)$$

*Etape1* : Pour stabiliser l'origine du système (3.28), les deux premières équations de ce système sont considérées en premier lieu. Étant donné que  $z_1 = x_1 - \alpha_0$ , avec  $\alpha_0 = 0$ . On choisit comme première fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (3.29)$$

Sa dérivée le long de la trajectoire (3.28) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= x_1 \dot{x}_1 \\ &= x_1(x_1^3 + x_2)\end{aligned}\quad (3.30)$$

La première fonction satbilisante maintenant est choisie comme suit :

$$\alpha_1 = x_{2_{det}} = -x_1 - x_1^3 \quad (3.31)$$

où  $x_{2_{det}}$  représente l'état détecté qui joue le rôle d'une commande virtuelle. Avec ce choix, la dérivée de FCL (3.29) devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -x_1^2 \\ &\leq 0\end{aligned}\quad (3.32)$$

Ce qui garantit la stabilité du premier sous système (3.28).

*Etape2* : La deuxième variable d'erreur est donnée par :

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 = x_2 + x_1 + x_1^3 \quad (3.33)$$

Le sous système (3.28) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}_1 = z_2 - x_1 \quad (3.34)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = x_2^3 + x_3 - \dot{\alpha}_1 \quad (3.35)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov augmentée suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (3.36)$$

Sa dérivée par rapport au temps est exprimée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= x_1(z_2 - x_1) + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -x_1^2 + z_2(3x_1^5 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_2x_1^2 + x_1 + x_2 + x_3)\end{aligned}\quad (3.37)$$

La fonction stabilisante  $\alpha_2$  peut être choisie afin de stabiliser la dynamique de (3.35) comme suit :

$$\alpha_2 = x_3 = -z_2 - (3x_1^5 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_2x_1^2 + x_1 + x_2) \quad (3.38)$$

Avec ce choix, on a :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -x_1^2 - z_2^2 \\ &\leq 0\end{aligned}\quad (3.39)$$

Dont la négativité assure la stabilité de l'origine (3.34) et (3.35).

*Etape 3* : La dernière variable d'erreur est donnée par :

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 = x_3 + z_2 + 3x_1^5 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_2x_1^2 + x_2 + x_1 \quad (3.40)$$

Le système (3.28) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z_2 - x_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - z_2 - x_1 \\ \dot{z}_3 = x_3 + u - \dot{\alpha}_2 \end{cases} \quad (3.41)$$

Et la nouvelle fonction de Lyapunov est une version augmentée de la précédente :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_3^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 \quad (3.42)$$

Sa dérivée le long des trajectoires du système global est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 \\ &= x_1(z_2 - x_1) + z_2(z_3 - z_2 - x_1) + z_3(u + 15x_1^7 + 6x_1^5 + 3x_2^5 + 21x_2x_1^4 \\ &\quad + 3x_1^2x_2^3 + 2x_1^3 + 2x_2^3 + 6x_2x_1^2 + 6x_1x_2^2 + 3x_3x_2^2 + 3x_3x_1^2 + 3x_3 + 2x_1) \end{aligned} \quad (3.43)$$

La loi de commande est ainsi déduite de l'équation (3.43), elle s'écrit :

$$\begin{aligned}u &= -[15x_1^7 + 9x_1^5 + 3x_2^5 + 21x_2x_1^4 + 3x_1^2x_2^3 + 5x_1^3 + 3x_2^3 + 9x_2x_1^2 + 6x_1x_2^2 \\ &\quad + 3x_3x_2^2 + 3x_3x_1^2 + 4x_3 + 3x_2 + 5x_1] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Et la fonction de Lyapunov correspondante est donnée par :

$$V_3 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + x_1^3)^2 + \frac{1}{2}(3x_1^5 + 2x_1^3 + x_2^3 + 3x_2x_1^2 + x_3 + 2x_2 + 2x_1)^2 \quad (3.45)$$

Avec un tel choix de la commande (3.44). La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= -x_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \\ &\leq 0\end{aligned}\quad (3.46)$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine (3.41), et donc la stabilité globale du système original (3.28).

### 3.3 Stabilisation avec incertitudes

Le problème de stabilisation robuste se pose naturellement lorsque le système est affecté par des incertitudes telles que les paramètres inconnus qui varient dans le temps ou des perturbations. Au cours de la dernière décennie, différentes techniques de stabilisation robuste ont été développées pour les systèmes non linéaires incertains. La méthode dite "la resynthèse par Lyapunov", développée par Corless et Leitmann [CL81], et Barmish [BCL83], utilise la fonction de Lyapunov d'un système nominal pour calculer une commande qui vient s'ajouter à la commande initiale, afin de robustifier le système en présence d'incertitudes qui satisfont la matching condition (c.à.d que la perturbation ne se trouve dans la même équation que la commande). Les premiers résultats de backstepping robuste apparurent pour la première fois dans Kokotovic et Freeman [FK92]. Ils ont été obtenus indépendamment par Marino [MT93], Qu [Qu93], Slotine et Hedrick [SH93]. Pour de plus amples informations sur la technique de backstepping, voir les livres de Marino et Tomei [MT95], Kristic et al. [KKK95], Freeman et Kokotovic [FK96].

La première méthode de stabilisation robuste que nous allons présenter est appelée amortissement non-linéaire "Non-Linear Damping" (NLD).

#### 3.3.1 Stabilisation robuste

Dans cette section, nous allons nous intéresser à une méthode de reconfiguration de la loi de commande basée sur l'approche de Lyapunov : "NLD". Cette méthode considère que les incertitudes affectant le système ont des bornes inconnues, et vérifient une hypothèse appelée condition de localisation "Matching condition". Dans ce cas les incertitudes et la commande figure dans la même équation. L'objectif est de trouver une loi de commande qui assure des trajectoires bornées du système en boucle fermée, malgré la présence de perturbation vérifiant la "matching condition".

Considérons le système décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[u + \psi^T(x)\delta(t, x, u)] \quad (3.47)$$

où  $\psi(x)$  est un vecteur de fonctions non linéaires connues de dimension  $(p \times 1)$ , et  $\delta(t, x, u)$  est un vecteur d'incertitudes non linéaires qui sont bornés de manière uniforme pour toutes les valeurs de  $x, u, t$ . Une condition nécessaire pour l'existence de la loi de commande est

qu'il existe une borne supérieure  $\|\delta\|_\infty$  pour  $\|\delta\|$ .

On suppose que l'on connaît une fonction de Lyapunov  $V(x)$  pour le système (3.47) vérifiant :

$$\varrho_1(|x|) \leq V(x) \leq \varrho_2(|x|) \quad (3.48)$$

$$\varrho_3(|x|) \leq W(x) \quad (3.49)$$

où  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  et  $\varrho_3$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et  $W(x)$  est une fonction définie positive. La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V(x)$  est donnée comme suit :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[f + gu] + \frac{\partial V}{\partial x}g\psi^T\delta \quad (3.50)$$

Pour surmonter le problème des incertitudes inconnues et garantir que la solution  $x(t)$  du système (3.47) est bornée pour toutes les conditions initiales  $x(t_0)$ , on augmente la loi de commande  $u = \alpha(x)$  par un terme d'amortissement non linéaire  $v$ , soit :

$$u = \alpha(x) + v \quad (3.51)$$

À partir de l'équation (3.51), nous avons :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[f + g\alpha] + \frac{\partial V}{\partial x}g[v + \psi^T\delta] \quad (3.52)$$

L'objectif de garantir la bornitude globale de la solution est équivalent à rendre  $\dot{V}$  négative à l'extérieur de la région compacte. Ce résultat est obtenu avec le choix de :

$$v = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x}g|\psi|^2, \quad \gamma > 0 \quad (3.53)$$

Ce qui donne la commande suivante :

$$u = \alpha(x) - \gamma \frac{\partial V}{\partial x}g|\psi|^2 \quad (3.54)$$

La dérivée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -W - \gamma \left( \frac{\partial V}{\partial x}g \right)^2 |\psi|^2 + \frac{\partial V}{\partial x}g\psi^T\delta \\ &< -W - \gamma \left( \frac{\partial V}{\partial x}g \right)^2 |\psi|^2 + \left| \frac{\partial V}{\partial x}g \right| |\psi| \|\delta\|_\infty \end{aligned} \quad (3.55)$$

où  $\|\delta\|_\infty$  est la borne supérieure de  $\|\delta\|$ .

Comparant (3.52) avec (3.55) on constate que le bon choix du terme d'amortissement non

linéaire (3.53) permet de rendre l'analyse de  $\dot{V}$  plus facile.

L'inégalité de *Young* (Annexe B.4) affirme que si les constantes  $p > 1$  et  $q > 1$  sont telles que  $(p - 1)(q - 1) = 1$ , alors pour tous  $\varepsilon > 0$  et tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$xy \leq \frac{\varepsilon^p}{p}|x|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}|y|^q \quad (3.56)$$

Si nous choisissons  $p = q = 2$  et  $\varepsilon^2 = 2\gamma$ , (3.56) devient :

$$xy \leq \gamma x^2 + \frac{1}{4\gamma}y^2 \quad (3.57)$$

En utilisant l'équation (3.55) et en appliquant l'inégalité de *Young*, on en déduit alors que :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} g \right| |\psi| \|\delta\|_\infty \leq \gamma \left| \frac{\partial V}{\partial x} g \right|^2 |\psi|^2 + \frac{\|\delta\|_\infty^2}{4\gamma} \quad (3.58)$$

Le calcul de la dérivée du système (3.47) le long de la trajectoire nous donne enfin l'expression suivante :

$$\dot{V} \leq -W(x) + \frac{\|\delta\|_\infty^2}{4\gamma} \quad (3.59)$$

À partir de l'équation (3.59), on peut dire que  $\dot{V}$  est négative si :  $W(x) > \frac{\|\delta\|_\infty^2}{4\gamma}$ . Avec la condition (3.49) on peut conclure que :

$$|x(t)| > \varrho_3^{-1} \left( \frac{\|\delta\|_\infty^2}{4\gamma} \right) \implies \dot{V} < 0 \quad (3.60)$$

Ce qui garantit que la solution du système (3.47), ainsi compensée, est bornée pour toutes les conditions initiales  $x(t_0)$ .

### 3.3.2 Backstepping avec incertitudes

L'avantage majeur du backstepping, c'est qu'il a la souplesse nécessaire pour éviter les annulations de non-linéarités utiles. Il peut être utilisé pour garantir la bornitude des incertitudes dans le cas où celles-ci ne vérifient pas la "matching condition". Dans le cas contraire, la combinaison du backstepping avec la technique de robustification "NLD" offre l'avantage de garantir la bornitude de la solution  $x(t)$  du système (3.47) sans passer par les lois d'adaptation. Pour illustrer cela, considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + B(x)\delta_1(x, u, t) \quad (3.61)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $B(x)$  est une matrice de fonctions non linéaires connues et  $\delta_1(x, u, t)$  est un vecteur d'incertitudes non linéaires bornées de manière uniforme pour toutes les valeurs de  $x, u, t$ . Considérons maintenant le système précédent augmenté par un intégrateur pur :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\zeta + B(x)\delta_1(x, u, t) \\ \dot{\zeta} = u + \psi^T(x, \zeta)\delta_2(x, u, t) \end{cases} \quad (3.62)$$

où  $\psi(x, \zeta)$  est un vecteur de fonctions non linéaires connues de dimension  $(p \times 1)$ , et  $\delta_2(t, x, u)$  est un vecteur de dimension  $(p \times 1)$  d'incertitudes non linéaires bornées de manière uniforme pour toutes les valeurs de  $x, \zeta, u, t$ .

Soit  $\alpha(x)$  une fonction stabilisante du système (3.62). On peut donc considérer qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$ , définie positive, telle que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\alpha(x) + B(x)\delta_1(x, u, t)] \leq -W(x) + b \quad (3.63)$$

où  $W(x)$  est définie positive et  $b$  est une constante.

Soit le changement de variable suivant :

$$z = \zeta - \alpha(x) \quad (3.64)$$

$$u_1 = u - \dot{\alpha}(x) \quad (3.65)$$

l'équation (3.62) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f + g\alpha] + gz + \delta_1(x, z) \\ \dot{z} = u_1 + \psi^T(x, \zeta)\delta_2(x, z) \end{cases} \quad (3.66)$$

Notons que le système (3.66) est représenté sous la description initiale (3.62). De plus le nouveau système est maintenant asymptotiquement stable lorsque  $z = 0$ .

Considérons maintenant la fonction de stockage  $V_1$ , qui est la fonction  $V$  augmentée par un terme d'erreur  $z$  :

$$V_1 = V(x) + \frac{1}{2}z^2 \quad (3.67)$$

Le calcul de la dérivée le long de la solution de (3.61) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial x}[f + g\alpha + B\delta_1] + \frac{\partial V}{\partial x}gz + z[u + \psi^T\delta_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g\zeta + B\delta_1)] \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}[f + g\alpha + B\delta_1] + z[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + g\zeta) + \frac{\partial V}{\partial x}] + z[\psi^T\delta_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x}B\delta_1] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Le choix de la commande est donné par :

$$\begin{aligned}
 u = & -c[\zeta - \alpha(x)] + \frac{\partial \alpha}{\partial x} [f(x) + g(x)\zeta] - \frac{\partial V}{\partial x}(x) \\
 & - \gamma[\zeta - \alpha(x)] \left\{ |\psi(x, \zeta)|^2 + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)B(x) \right|^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Avec un tel choix de la commande, la dérivée de  $V_2$  peut s'écrire comme suit :

$$\dot{V}_2 \leq -W(x) - cz^2 - \gamma z^2 \left[ |\psi|^2 + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} B \right|^2 \right] \tag{3.70}$$

$$+ |z||\psi| \|\delta_2\|_\infty + |z| \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} B \right| \|\delta_1\|_\infty \tag{3.71}$$

Il s'agit maintenant d'assurer que les deux derniers termes perturbateurs dont le signe de  $\dot{V}_2$  est a priori inconnu, ne déstabilise pas le système. Les deux termes perturbateurs sont majorés en utilisant les résultats du Théorème de Young (Annexe B.4) et sont donnés par :

$$|z||\psi| \|\delta_2\|_\infty \leq \gamma z^2 |\psi|^2 + \frac{\|\delta_2(t)\|_\infty^2}{4\gamma} \tag{3.72}$$

$$|z| \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} B \right| \|\delta_1\|_\infty \leq \gamma z^2 \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} B \right|^2 + \frac{\|\delta_1(t)\|_\infty^2}{4\gamma} \tag{3.73}$$

La dérivée temporelle de  $V_2$  peut être majorée de la façon suivante :

$$\dot{V}_2 \leq -W(x) - cz^2 + \frac{\|\delta_1(t)\|_\infty^2}{4\gamma} + \frac{\|\delta_2(t)\|_\infty^2}{4\gamma} \tag{3.74}$$

À ce stade, nous pouvons assurer que  $\dot{V}_2$  est négative à l'extérieur d'un ensemble compact (une certaine sphère) malgré la présence des incertitudes. Cependant, pour assurer la stabilité asymptotique globale, une solution consiste à traiter le système comme une interconnexion de deux systèmes et ensuite utiliser le théorème de petit gain [KKK95].

### 3.4 Backstepping Adaptatif et fonctions de réglages

Pour des systèmes avec des incertitudes paramétriques, une loi de mise à jour de paramètres assurant la stabilité en boucle fermée peut être intégrer dans la commande. Ceci est réalisé en prolongeant la fonction de Lyapunov  $V(x)$  avec un terme pénalisant l'erreur d'estimation.

L'idée est d'utiliser le backstepping pour concevoir une loi de commande en faisant comme

si tous les paramètres étaient connus, et ensuite de remplacer les paramètres inconnus par leurs estimations. Dans un premier temps, les propriétés seront énoncées et illustrées sur des systèmes d'ordre deux, puis une généralisation aux systèmes d'ordre  $n$  sera donnée.

### 3.4.1 Algorithme de base

Nous considérons le système non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi(x_1)\theta \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.75)$$

où  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(x_1)$  est une fonction non linéaire lisse ( $\psi(0) = 0$ ) et  $\theta$  est un paramètre inconnu et constant.

*Étape 1* : Dans cette première étape nous introduisons la variable  $z_1 = x_1 - y_d$  (dans ce qui suit, on considère  $y_d = 0$ ). La loi de commande doit assurer la convergence de  $z_1$  vers zéro. Par conséquent, on peut définir une première FCL associée à  $z_1$ ,  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ . La dérivée de  $V_1$  est donnée par :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \quad (3.76)$$

$$= z_1(x_2 + \psi\theta) \quad (3.77)$$

La fonction stabilisante choisie pour rendre  $\dot{V}_1$  négative est définie comme suit :

$$\alpha = -c_1 z_1 - \psi \hat{\theta}_1 \quad (3.78)$$

Le paramètre connu  $\hat{\theta}_1$  étant l'estimé de  $\theta$  à l'étape 1 (avec  $\theta_1 = \tilde{\theta} + \hat{\theta}_1$ ).

À partir de la deuxième variable d'erreur  $z_2 = x_2 - \alpha$ , on peut exprimer la dynamique de  $z_1$  en fonction de  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1 \psi \quad (3.79)$$

Choisissons ensuite une fonction candidate de Lyapunov définie sous la forme suivante :

$$V_{1a}(z_1, \tilde{\theta}_1) = V_1 + \frac{1}{2m} \tilde{\theta}_1^2 \quad (3.80)$$

où  $m$  est une constante positive non nulle et  $\tilde{\theta}$  est l'erreur entre la valeur exacte et la valeur estimée. En dérivant (3.80) par rapport au temps, en se servant de (3.79), il vient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{1a} &= \dot{V}_1 + \frac{1}{m} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \\
 &= z_1 \dot{z}_1 - \frac{1}{m} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 \psi \tilde{\theta}_1 - \frac{1}{m} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}_1 (z_1 \psi - \frac{1}{m} \dot{\hat{\theta}}_1)
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Le signe de la dérivée reste toujours indéterminé, mais un choix judicieux de la loi d'adaptation de l'estimé  $\hat{\theta}_1$  permet d'éliminer le terme incertain. Avec le choix  $\dot{\hat{\theta}}_1 = m z_1 \psi$ , la dérivée de  $V_{1a}$  devient :

$$\dot{V}_{1a} = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \tag{3.82}$$

*Etape 2* : On considère le système (3.75) et on définit la nouvelle variable d'erreur  $z_2 = x_2 - \alpha$ . Les équations du système à commander, dans l'espace  $(z_1, z_2)$ , s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1 \psi \\ \dot{z}_2 = u - \dot{\alpha} \end{cases} \tag{3.83}$$

La présence du terme  $z_1 z_2$  dans l'expression de la dérivée (3.82) ne permet pas la détermination de son signe. Afin d'en savoir plus sur la stabilité du système, on construit la fonction de Lyapunov augmentée par un nouveau terme d'erreur  $z_2$  :

$$V_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1) = V_{1a}(z_1, \tilde{\theta}_1) + \frac{1}{2} z_2^2 \tag{3.84}$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1) &= \dot{V}_{1a} + z_2 \dot{z}_2 \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (u - \dot{\alpha}) \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \psi \theta) - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right] \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ u + z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}_1} m \psi z_1 - \theta \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi \right]
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

La commande qu'on va définir par la suite doit être capable d'éliminer les termes incertains. Elle est donnée en fonction des paramètres estimés :

$$u = -c_2 z_2 - z_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}_1} m \psi z_1 + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi \tag{3.86}$$

On obtient alors comme dérivée :

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \tilde{\theta}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \psi z_2 \quad (3.87)$$

Il est clair, d'après l'équation (3.87), que nous n'avons plus aucun moyen pour éliminer le terme  $\tilde{\theta}_1$ . Pour surmonter cette difficulté, nous remplaçons  $\hat{\theta}_1$  dans l'expression de  $u$  (3.86) par une nouvelle estimation  $\hat{\theta}_2$ . Les équations du système à commander, dans l'espace  $(z_1, z_2)$  s'écrivent de nouveau par :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1 \psi \quad (3.88)$$

$$\dot{z}_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \tilde{\theta}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi \quad (3.89)$$

avec comme loi d'adaptation  $\dot{\hat{\theta}}_1$ . Pour arriver à éliminer tous les termes incertains, on considère la fonction de Lyapunov du système global :

$$V_{2a}(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2m} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2m} \tilde{\theta}_2^2 \quad (3.90)$$

où  $m$  est une constante positive et  $\tilde{\theta}_2$  est l'erreur d'estimation. Sa dérivée le long de la trajectoire du système (3.75), s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a}(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) &= \dot{V}_2 + \frac{1}{m} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \\ &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{m} [\tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2] \\ &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \tilde{\theta}_2 \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \frac{1}{m} \dot{\tilde{\theta}}_2 \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Avec le choix :

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = m \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi \quad (3.92)$$

La dérivée se réduit à :

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (3.93)$$

D'où la stabilité du système global.

### 3.4.2 Réduction du surparamétrage

La surestimation des paramètres  $\theta$  cause une augmentation de l'ordre dynamique résultant du contrôleur adaptatif. Dans la section suivante le surparamétrage sera éliminé

par la méthode des fonctions de réglage. Comme préalable à cette étude, nous montrons comment le surparamétrage peut être évité dans le cas présent (voir (3.81) et (3.91)) où le terme incertain ne se trouve pas directement dans la même équation que la commande, mais séparé de celle-ci par un intégrateur. L'objectif de cette section est de trouver une loi de commande  $u(x, \hat{\theta})$  qui assure la stabilité de l'origine du système (3.75), avec une seule loi d'adaptation  $\hat{\theta}$ . Pour ce faire, on considère le même système (3.75) et on en déduit de la même façon que précédemment la fonction stabilisante suivante, en prenant les mêmes notations que précédemment :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \psi \hat{\theta} \quad (3.94)$$

La dérivée résultante de ce choix est donnée comme suit :

$$\dot{V}_1(z_1, \tilde{\theta}) = z_1(x_2 + \psi \hat{\theta}) + z_1 \psi \tilde{\theta} \quad (3.95)$$

On remarque l'apparition d'un terme incertain  $\tilde{\theta}$ . Son signe est indéfini et aucune conclusion ne peut être déduite sur la stabilité du système.

**Remarque 3.1.** *Afin d'éviter le surparamétrage, la construction d'une loi de mise à jour est supprimée dans cette étape et le signe de la dérivée de  $\dot{V}_1$  reste indéterminé. Sans que cela n'ait d'influence sur la stabilité globale. Nous allons, dans ce qui suit démontrer que la fonction  $V_2$  assure la stabilité globale du système.*

Afin d'en savoir plus sur la stabilité du système, on utilise la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2m} \tilde{\theta}^2 \quad (3.96)$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{m} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + z_2 \left( u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \tilde{\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta} \psi z_1 - \frac{1}{m} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -c_1 z_1^2 + \left( u + z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \hat{\theta} \psi) - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta} \left( \psi z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \frac{1}{m} \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

La loi de commande assurant la stabilité, et la loi de mise à jour qui adapte le paramètre  $\hat{\theta}$  sont données par :

$$u = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \hat{\theta} \psi) + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (3.98)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = m \left( \psi z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi z_2 \right) \quad (3.99)$$

Un tel choix permet de réduire la dérivée à :

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (3.100)$$

Ce qui assure la stabilité de l'origine de (3.75).

### 3.4.3 Fonctions de réglage pour un système d'ordre "n"

Une des améliorations qui peut être réalisée avec la conception par les fonctions de réglage est la réduction de l'ordre dynamique du contrôleur adaptatif à son minimum (le nombre d'estimations est égal au nombre de paramètres inconnus). Cette conception d'ordre minimale est avantageuse non seulement pour la mise en œuvre mais aussi parce qu'elle garantit les meilleures propriétés de stabilité et de convergence. L'objectif de ce paragraphe est donc de généraliser le mécanisme de décomposition donné dans le paragraphe 3.4.1. pour des systèmes d'ordre deux aux systèmes d'ordre  $n$ . Le système sous forme "strict-feedback" est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \psi_1^T(x_1)\theta \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \psi_2^T(x_1, x_2)\theta \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \psi_{n-1}^T(x_1, \dots, x_{n-1})\theta \\ \dot{x}_n &= b(x)u + \psi_n^T(x)\theta \end{aligned} \quad (3.101)$$

où  $\theta \in \mathbb{R}^p$  représente un vecteur de paramètres inconnus et  $b(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . La généralisation de la procédure de conception par backstepping avec les fonctions de réglage s'exprime par le théorème ci-dessous [KKK95]. La preuve de ce dernier s'appuie sur la théorie de Lyapunov.

**Théorème 3.1.** *Soit le système (3.101) avec  $b(x) \neq 0$ . Le contrôleur adaptatif par backstepping et sa loi d'adaptation correspondante sont donnés par :*

$$u = \frac{\alpha_n(x, \hat{\theta})}{b(x)} \quad \dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n(x, \hat{\theta}) \quad (3.102)$$

où la matrice de gain d'adaptation  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , la loi de commande  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , et

la fonction de réglage  $\tau_n$  sont donnés par les équations récursives suivantes :

$$\begin{aligned}
 z_i &= x_i - \alpha_{i-1} \\
 \alpha_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta}) &= -z_{i-1} - c_i z_i - \omega_i^T \hat{\theta} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \omega_i z_k \\
 \tau_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta}) &= \tau_{i-1} + \omega_i z_i \quad \omega_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta}) = \psi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k
 \end{aligned}$$

et  $z_0 \equiv \alpha_0 \equiv \tau_0 \equiv 0$ ,  $c_i > 0$ . La variable  $z$  représente l'erreur.  $c_i$  sont des constantes positives. Par conséquent la Commande par Backstepping Adaptatif (CBA) avec les fonctions de réglage assure la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre  $x = x_e$  du système (3.101) :

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})^T \tilde{\theta} \quad (3.103)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W(z, \hat{\theta})z \quad (3.104)$$

avec :

$$A_z = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -c_2 & 1 + \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ 0 & -1 - \sigma_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 + \sigma_{n-1,n} \\ 0 & -\sigma_{2n} & \dots & -1 - \sigma_{n-1,n} & -c_n \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{jk}(x, \hat{\theta}) = -\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \omega_k \quad (3.105)$$

et

$$W(z, \hat{\theta})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{bmatrix} F(x)^T$$

où  $F(x) = [\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x)]$  représente un vecteur de fonctions non linéaires connues.

### 3.4.4 Exemple de simulation

Pour illustrer les performances des techniques développées vis-à-vis de variations de paramètres du système, nous reprenons le système non linéaire utilisé au paragraphe 3.2.2

où les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont incertains[AS00] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1^3 + x_2 + d \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 = a_3 x_3 + u \end{cases} \quad (3.106)$$

Les grandeurs scalaires,  $a_i$ , sont des paramètres inconnus qui ont des valeurs nominales  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ . Cette représentation est équivalente à un système simple qui est sous la forme "strict feedback" avec l'incertitude paramétrique comme le montre l'équation (3.101). Supposons maintenant que le système (3.106) n'est pas affecté par des perturbations extérieures ( $d = 0$ ). Les deux premières commandes virtuelles et la loi de commande finale déterminées systématiquement étape par étape, sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 z_1 - \hat{a}_1 x_1^3 \\ \alpha_2 &= -c_2 z_2 - z_1 - \hat{a}_2 x_2^3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \hat{a}_1 x_1^3) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{a}_1} \gamma_1 x_1^3 \left( z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right) \\ u &= -c_3 z_3 - z_2 - \hat{a}_3 x_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \hat{a}_1 x_1^3) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + \hat{a}_2 x_2^3) + V_3 \end{aligned} \quad (3.107)$$

où  $V_3$  est donnée par :

$$V_3 = \gamma_1 \frac{\alpha_2}{\partial \hat{a}_1} x_1^3 \left( z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \right) + \gamma_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{a}_2} x_2^3 \left( z_2 - z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) + \gamma_1 x_1^3 z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{a}_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \quad (3.108)$$

Les gains pour ce contrôleur sont des constantes positives  $k_i > 0$  et les  $\gamma_i > 0$  sont les gains d'estimation. Le contrôleur est augmenté avec les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= \gamma_1 x_1^3 \left( z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \right) \\ \dot{\hat{a}}_2 &= \gamma_2 x_2^3 \left( z_2 - z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) \\ \dot{\hat{a}}_3 &= \gamma_3 x_3 z_3 \end{aligned} \quad (3.109)$$

Les équations (3.107), (3.108) sont construites itérativement par la méthode directe de Lyapunov. Spécifiquement, la fonction de Lyapunov suivante est utilisée :

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} z_i^2 \quad (3.110)$$

où  $\tilde{\theta}^T = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3]$  et  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . Si l'équation (3.110) est différentiable le long des trajectoires de l'équation (3.106) avec la commande par backstepping adaptatif (CBA)

donnée par les équations (3.107) et (3.109), alors la dérivée de la fonction de Lyapunov est semi-définie négative :

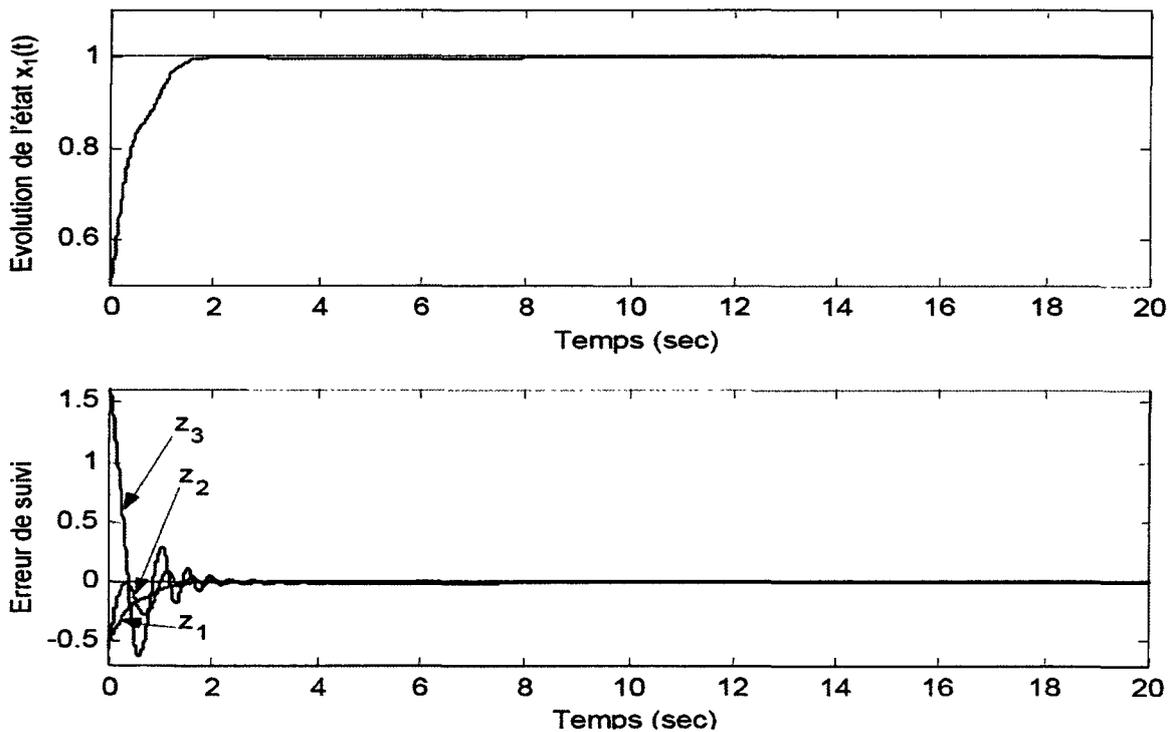
$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^3 c_i z_i^2 \leq 0 \quad (3.111)$$

Le lemme de Barbalat (Annexe B.2.3) peut alors être appliqué pour conclure que toutes les erreurs convergent vers zéro.

Les paramètres de la CBA sont donnés comme suit :

$$c_1 = c_2 = c_3 = 6 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.1$$

Le vecteur de condition initiale pour le système est choisi égal à  $[0.5, 0.8, 0.2]$  et les valeurs initiales des paramètres d'estimations sont choisies telles-que :  $[\hat{a}_1(0), \hat{a}_2(0), \hat{a}_3(0)]^T = [1.1, 0.9, 0.9]^T$ .

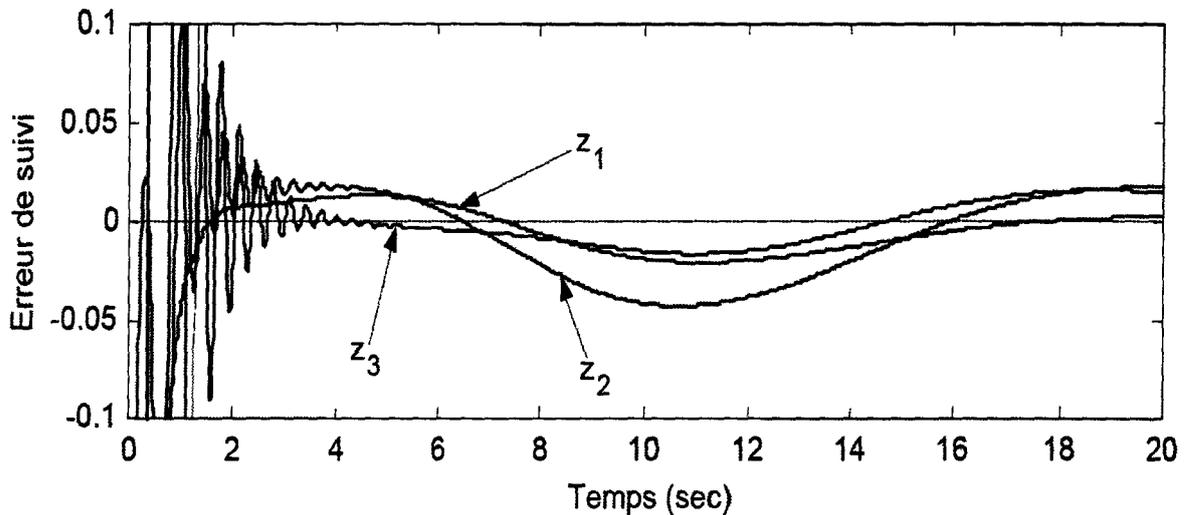


**Figure 3.3 :** Backstepping adaptatif pour un système avec des paramètres incertains et sans perturbations extérieures.

Le premier graphe de la figure 3.3 montre que la sortie converge vers la consigne souhaitée et la deuxième courbe montre que toutes les erreurs convergent également vers zéro. Si nous faisons un zoom sur les erreurs de suivi nous remarquons que l'erreur  $z_3$  converge la première suivi par  $z_2$  et ensuite  $z_1$ . C'est la convergence séquentielle imposée par la

conception basée sur le backstepping adaptatif.

Pour simuler l'effet de l'erreur du modèle non paramétrique, le système précédent (3.106) est perturbé en ajoutant une perturbation sinusoïdale à la première équation d'état ( $d = 25 \sin(\frac{2\pi t}{20})$ ).



**Figure 3.4 :** Backstepping adaptatif pour un système avec des paramètres incertains et des perturbations extérieures.

L'évolution des erreurs de suivi du système en boucle fermée résultant de la commande adaptative par backstepping est illustrée par la figure 3.4. La propriété importante de cette courbe est que toutes les trois erreurs intermédiaires oscillent de la même façon autour de 0. Ces trajectoires montrent aussi que l'erreur  $z_1$  est nettement inférieure à  $z_2$  et à  $z_3$ . Nous pouvons conclure à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable, et cela malgré la présence des incertitudes et des perturbations qui ne vérifient pas la condition de recouvrement ("matching condition").

L'utilisation du contrôle adaptatif assure la stabilité des systèmes en boucle fermée tout en faisant converger les paramètres estimés vers les paramètres réels.

### 3.5 Application de la CBC sur un système de 3 cuves

Dans la première partie de ce chapitre, une solution complète, correctement formalisée, a été présentée lorsque le modèle du système est linéaire ou écrit sous une forme

triangulaire. Par contre, il n'existe pas actuellement de théorie générale de conception par backstepping lorsque le modèle est non linéaire écrit sous la forme générale. Les approches les plus répandues nécessitent de transformer le système sous une forme adaptée. Dans bien des cas, la détermination de cette transformation n'est pas triviale. Le présent travail reprend et complète une approche de génération développée initialement dans la première partie. La formulation de cette méthode utilise le système de 2 colonnes représenté dans (1.100). Les deux sous-sections suivantes présentent la conception complète et l'analyse de stabilité de la commande par backstepping classique (CBC).

### 3.5.1 Conception de la loi de Commande

Le modèle utilisé pour concevoir la loi de commande est donné dans (1.100).

*Étape 1* : soit  $x_{2d}$  le niveau désiré du liquide pour la variable d'état  $x_2(t)$ . L'écart  $z_1 = x_2 - x_{2d}$  définit l'erreur entre le niveau actuel et le niveau désiré. La loi de contrôle doit assurer la convergence de  $z_1$  vers zéro. Par conséquent, on définit une première fonction de Lyapunov  $V_1$ , associée à  $z_1$  :

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (3.112)$$

La dérivation de  $V_1$  entraîne :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \quad (3.113)$$

En rappelant la dynamique du niveau de liquide  $\dot{x}_3$  (1.100), la dérivée de  $z_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= C_1\sqrt{x_1 - x_2} - B_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (3.114)$$

En additionnant et en retranchant  $\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$  à la deuxième équation de (3.114), il vient :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d}) - B_3\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d} \quad (3.115)$$

avec  $z_2 = C_1\sqrt{x_1 - x_2} - \alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$ . Basée sur la dynamique d'erreur de poursuite (3.114), la fonction stabilisante correspondante  $\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$  est conçue ainsi :

$$\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d}) = B_3\sqrt{x_2} - k_1 z_1 + \dot{x}_{2d} \quad (3.116)$$

où  $k_1$  est une constante positive. Il apparaît alors l'expression de  $z_2 = C_1\sqrt{x_1 - x_2} - \alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$ , qu'on peut définir comme l'écart entre la commande virtuelle et la fonction

stabilisante  $\alpha_1$  assurant la convergence de  $z_1$  vers zéro. Ainsi, à la fin de la première étape du backstepping, nous avons :

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \quad (3.117)$$

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (3.118)$$

*Étape 2* : La méthodologie de conception de la commande par backstepping de [KKK95] exige maintenant la dérivation de  $z_2$  par rapport au temps. Suite à cela, nous utilisons (1.100) et (3.116) pour obtenir :

$$\dot{z}_2 = -C_1^2 + \frac{B_3^2}{2} + \frac{C_1 B_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + k_1 \dot{z}_1 + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} - \ddot{x}_{2d} \quad (3.119)$$

Maintenant, substituons (3.115) dans (3.119) en isolant la commande  $u$ , on obtient :

$$\dot{z}_2 = f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d}) + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \quad (3.120)$$

avec :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d}) &= -C_1^2 + \frac{B_3^2}{2} + \frac{C_1 B_3}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} \\ &+ k_1 (C_1 \sqrt{x_1 - x_2} - B_3 \sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) - \ddot{x}_{2d} \end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d})$  est une fonction connue. Ainsi, la conception de la commande d'entrée  $u$  est réalisée comme suit :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (3.121)$$

En utilisant (3.115) et (3.120), la dérivée de  $V_2$  peut être calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \left[ f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d}) + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \right] \\ &= -k_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d}) + \frac{C_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \right] \end{aligned} \quad (3.122)$$

Selon (3.122), la CBC est conçue comme suit :

$$u = -\frac{2A}{C_1} \sqrt{x_1 - x_2} (z_1 + f(x_1, x_2, \dot{x}_{2d}, \ddot{x}_{2d}) + k_2 z_2) \quad (3.123)$$

où  $k_2$  est une constante positive résultante de la dynamique suivante :

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 - z_1 \quad (3.124)$$

**Remarque 3.2.** On peut remarquer, qu'à partir des équations (3.119)-(3.122), il y a une singularité de commande  $x_1(t) = x_2(t)$ . En outre, si  $x_1(t) = 0$  aucune commande ne sera appliquée au système, qui cause par la suite  $x_1(t) - x_2(t) = 0$  créant ainsi une singularité.

Dans le paragraphe suivant, l'analyse de la stabilité de la dynamique en boucle fermée (3.118), (3.124) est réalisée en utilisant la théorie de Lyapunov.

### 3.5.2 Analyse de stabilité

L'objectif de la commande (3.123) est de rendre le niveau du liquide d'eau  $x_2$  capable de suivre la trajectoire de référence. Nous montrons, par le biais du théorème suivant, que le système (1.100) en boucle fermée est stable. Afin d'énoncer le résultat principal de cette section, nous utilisons la notation  $x(t) = [z_1 \quad z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.2.** La loi de commande CBC (3.123) assure la convergence exponentielle de l'état du vecteur augmenté  $x(t)$ , comme le montre l'inégalité suivante :

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{-\lambda t} \quad (3.125)$$

avec :

$$\lambda = \min(k_1, k_2) \quad (3.126)$$

ainsi, toutes les composantes de  $x(t)$ ,  $z_1$  et  $z_2$ , convergent exponentiellement vers l'origine.

Pour prouver le théorème 3.3, nous définissons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_2(x) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}\|x(t)\|^2 \quad (3.127)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V_2$  s'écrit :

$$\dot{V}_2(x) = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 \quad (3.128)$$

Sa dérivée le long des trajectoires de (3.118), (3.124) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &= -k_1z_1^2 + z_1z_2 + z_2(-k_2z_2 - z_1) \\ &= -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Par conséquent, le système est stable, ce qui entraîne la convergence exponentielle de  $z_1$  et  $z_2$  vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.6 Application de la CBA sur un système de 3 cuves

La problématique de la commande adaptative par backstepping des systèmes non linéaires sous une forme adaptée a été initialement considérée en première partie où les principaux résultats sont donnés en termes de solution d'équations du système sous forme triangulaire. En effet, pour la synthèse de la loi de commande par backstepping adaptatif pour les systèmes sous une forme adaptée, les auteurs se basent sur les fonctions de réglage pour réduire le problème de surparamétrisation. Cependant, ces résultats peuvent être exploités pour l'application du backstepping adaptatif sur les systèmes sous forme générale sans passer par la transformation du système (voir la première partie du chapitre 3). Les paramètres adaptés ainsi obtenus pour le système de 3 colonnes sont regroupés dans une seule équation, rendant ces résultats inapplicables en pratique et provoquant ainsi le problème de singularité. Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de commande adaptative par backstepping des systèmes non linéaires sous une forme générale. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'application de la procédure de conception sur le système de 3 colonnes [BCADB09]. Nous désirons déterminer une loi de commande  $u$  qui stabilise exponentiellement le système (1.100), sachant que les valeurs exactes du coefficient de débit  $a_{z1}$  et du coefficient de débit de fuite  $b_{z3}$  ne sont pas connues. Les expressions de ces deux paramètres incertains sont données par :

$$\begin{aligned} C_1 &= a_{z1}\alpha, & \alpha &= \frac{S_n\sqrt{2g}}{A} \\ B_3 &= b_{z3}\beta, & \beta &= \frac{S_L\sqrt{2g}}{A} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'aboutir à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} + \frac{u}{A} \\ \dot{x}_2 &= a_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - b_{z3}\beta\sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (3.130)$$

**Etape1** : La première étape pour construire la loi commande CBA est de considérer l'écart entre la sortie et la valeur désirée  $z_1 = x_2 - x_{2d}$ . La loi de commande doit assurer la convergence de  $z_1$  vers zéro. Par conséquent, on définit une première fonction de stockage associée à  $z_1$ ,  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ . La dérivée de  $V_1$  entraîne :

$$\dot{V}_1 = z_1\dot{z}_1 \quad (3.131)$$

$$= a_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - b_{z3}\beta\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d} = -k_1z_1^2 \quad (3.132)$$

Le terme  $\hat{a}_{z_1}\alpha\sqrt{(x_1 - x_2)}$  peut être considéré comme une commande virtuelle dans l'équation ci-dessus. La fonction stabilisante choisie pour rendre  $\dot{V}_1$  négative est définie comme suit :

$$\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d}) = \hat{b}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} - k_1 z_1 - \dot{x}_{2d} \quad (3.133)$$

où  $k_1$  est une constante positive.

À partir de la deuxième variable d'erreur  $z_2 = x_2 - \alpha_1$ , on peut exprimer la dynamique de  $z_1$  en fonction de  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = z_2 - k_1 z_1 + \tilde{a}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \tilde{b}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} \quad (3.134)$$

La dérivée résultante du choix de la fonction stabilisante est donnée par :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 \tilde{a}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - z_1 \tilde{b}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} \quad (3.135)$$

On remarque l'apparition de deux termes incertains  $\tilde{a}_{z_1}$  et  $\tilde{b}_{z_3}$ . leurs signe sont indéfinis et aucune conclusion ne peut être tirée sur la stabilité du système.

**Etape2 :** On considère le système (3.130) et on définit la nouvelle variable d'erreur  $z_2 = \tilde{a}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$ , qui représente l'écart entre la commande virtuelle et la fonction stabilisante. Les équations du système à commander, dans l'espace  $(z_1, z_2)$  s'écrivent :

$$\dot{z}_1 = z_2 - k_1 z_1 + \tilde{a}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \tilde{b}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & f(x_1, x_2, \hat{a}_{z_1}, \hat{b}_{z_3}) - \hat{a}_{z_1}\tilde{a}_{z_1}\alpha^2 + \frac{\hat{a}_{z_1}\tilde{b}_{z_3}\alpha\beta}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 - x_2}} + \frac{\tilde{a}_{z_1}\hat{b}_{z_3}\alpha\beta}{2} \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\hat{b}_{z_3}\tilde{b}_{z_3}\beta^2}{2} \\ & + \frac{\hat{a}_{z_1}\alpha}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} + v_1 + v_2 \end{aligned} \quad (3.137)$$

où  $f(x_1, x_2, \hat{a}_{z_1}, \hat{b}_{z_3})$  est une fonction connue définie par :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \hat{a}_{z_1}, \hat{b}_{z_3}) = & \frac{\hat{a}_{z_1}\hat{b}_{z_3}\alpha\beta}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \frac{\hat{b}_{z_3}^2\beta^2}{2} - \hat{a}_{z_1}^2\alpha^2 - \ddot{x}_{2d} \\ & + k_1(\hat{a}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \hat{b}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) \end{aligned} \quad (3.138)$$

$v_1$  et  $v_2$  sont deux fonctions connues exprimées en fonction des lois d'adaptations :

$$\begin{aligned} v_1 = & \dot{\hat{a}}_{z_1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} \\ v_2 = & -\dot{\hat{b}}_{z_3}\beta\sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (3.139)$$

Notez que les paramètres du système (3.130) sont supposés constants :

$$\tilde{a}_{z_1} = a_{z_1} - \hat{a}_{z_1}, \tilde{b}_{z_3} = b_{z_3} - \hat{b}_{z_3}, \dot{\tilde{a}}_{z_1} = -\dot{\hat{a}}_{z_1}, \dot{\tilde{b}}_{z_3} = -\dot{\hat{b}}_{z_3} \quad (3.140)$$

**Théorème 3.3.** *La loi de commande exprimée par :*

$$u = -\frac{2A}{\hat{a}_{z1}\alpha} \sqrt{x_1 - x_2} \left( k_2 z_2 + z_1 + f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) + v_1 + v_2 \right) \quad (3.141)$$

*assure la convergence asymptotique du vecteur d'état augmenté  $x(t)$  telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (3.142)$$

*Ainsi, toutes les composantes de  $x(t)$ ,  $z_1$  et  $z_2$ , convergent exponentiellement vers l'origine.*

La convergence de  $z_2$  entraîne naturellement la convergence de  $z_1$ . Pour assurer la convergence de  $z_2$ , on ajoute  $\frac{1}{2}z_2^2$  à la fonction de Lyapunov  $V_1$ . Dans l'expression de  $\dot{z}_2$ , la dynamique de  $x_2$  va apparaître, perturbée par les deux termes inconnus  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$ . Soit  $\hat{a}_{z1}$  et  $\hat{b}_{z3}$  les estimations de ces deux paramètres inconnus. Il faut veiller à réduire l'erreur d'estimation  $\tilde{a}_{z1} = a_{z1} - \hat{a}_{z1}$ ,  $\tilde{b}_{z3} = b_{z3} - \hat{b}_{z3}$ . Par conséquent, ces erreurs seront ajoutées à la fonction de stockage  $V_1$ , conduisant à la définition d'une fonction de Lyapunov augmentée  $V_2$  :

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}^2 \quad (3.143)$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont des gains d'adaptation.

Utilisant (3.137) et (3.143), la dérivée de  $V_2$  peut être calculée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \gamma_1^{-1} \tilde{a}_{z1} \dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1} \tilde{b}_{z3} \dot{\tilde{b}}_{z3} \\ &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 \dot{z}_2 + z_1 \tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} \\ &\quad - z_1 \tilde{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} - \gamma_1^{-1} \tilde{a}_{z1} \dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1} \tilde{b}_{z3} \dot{\tilde{b}}_{z3} \end{aligned} \quad (3.144)$$

En prenant la dérivée de (3.144) et en substituant (3.137) dans cette dérivée nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + \frac{\hat{a}_{z1} \alpha}{2A \sqrt{x_1 - x_2}} u + f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) + v_1 + v_2 \right] \\ &\quad + \alpha \left( z_1 \hat{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - z_2 \left[ \hat{a}_{z1} \alpha + \frac{\hat{b}_{z3} \beta \sqrt{x_1 - x_2}}{2 \sqrt{x_2}} + k_1 \sqrt{x_1 - x_2} \right] - \frac{\dot{\hat{a}}_{z1}}{\gamma_1} \right) \tilde{a}_{z1} \\ &\quad + \beta \left( -z_1 \sqrt{x_2} + z_2 \left[ \frac{\hat{b}_{z3} \beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_2}}{2 \sqrt{x_1 - x_2}} - k_1 \sqrt{x_3} \right] - \frac{\dot{\hat{b}}_{z3}}{\gamma_3} \right) \tilde{b}_{z3} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov,  $\dot{V}_2$  doit être une fonction définie négative.

Par conséquent la loi de commande est choisie comme suit :

$$u = -\frac{2A}{\hat{a}_{z1}\alpha} \sqrt{x_1 - x_2} \left( k_2 z_2 + z_1 + f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) + v_1 + v_2 \right) \quad (3.146)$$

Avec  $\hat{a}_{z1}\alpha \neq 0$ . Pour éliminer les termes  $\tilde{a}_{z1}$  et  $\tilde{b}_{z3}$ , les lois de mise à jour peuvent être déterminées par les équations suivantes :

$$\dot{\hat{a}}_{z1} = \gamma_1 \left( z_1 \sqrt{x_1 - x_2} - z_2 \left[ \hat{a}_{z1}\alpha + \frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2}} - k_1 \sqrt{x_1 - x_2} \right] \right) \quad (3.147)$$

$$\dot{\hat{b}}_{z3} = \gamma_3 \left( -z_1 \sqrt{x_2} + z_2 \left[ \frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 - x_2}} - k_1 \sqrt{x_3} \right] \right) \quad (3.148)$$

où  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$ .

Substituant dans la dérivée de la FCL (3.145) l'entrée  $u(t)$  par la loi de commande (3.146) et la loi de paramètres définie dans (3.147) et (3.148), nous obtenons alors :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \quad (3.149)$$

Pour montrer la convergence des états  $z_1$  et  $z_2$  ainsi que leurs bornitudes, nous intégrons la relation : (3.149)

$$V_2(z_1(t), z_2(t)) - V_2(z_1(t_0), z_2(t_0)) = -k_1 \int_{t_0}^t z_1^2(\tau) d\tau - k_2 \int_{t_0}^t z_2^2(\tau) d\tau \quad (3.150)$$

En utilisant le fait que  $V_2(t) \geq 0$ , pour  $t \geq t_0$ , nous avons :

$$W_2 = k_1 \int_{t_0}^t z_1^2(\tau) d\tau + k_2 \int_{t_0}^t z_2^2(\tau) d\tau \leq V_2(t_0) \quad (3.151)$$

Puisque  $W_2(t)$  est une fonction uniformément continue, alors d'après la Lemme de Barbalat (Annexe B.1),  $z_1$  et  $z_2$  sont bornés. De plus  $\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 = 0$  et par conséquent  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0$ . De plus à partir de (3.149), nous pouvons écrire que :

$$\dot{V}_2(t) \leq -2 \min \{k_1, k_2\} V_2(t) \quad (3.152)$$

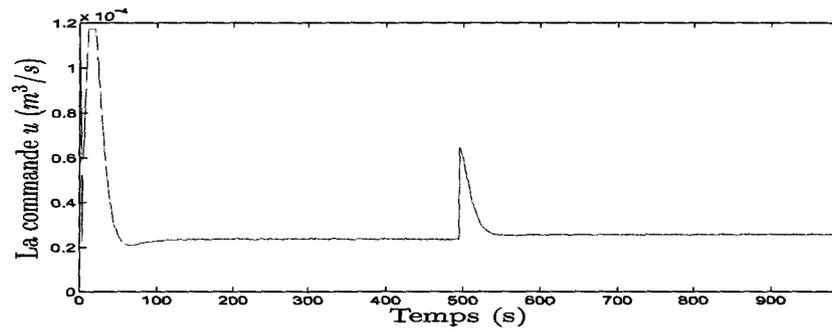
$$V_2(t) \leq V_2(t_0) e^{-\mu(t-t_0)} \quad (3.153)$$

avec  $\mu = 2 \min \{k_1, k_2\}$ , ce qui implique que le vecteur d'état  $x(t) = [z_1 \ z_2]^T$  converge exponentiellement vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  selon la loi suivante :

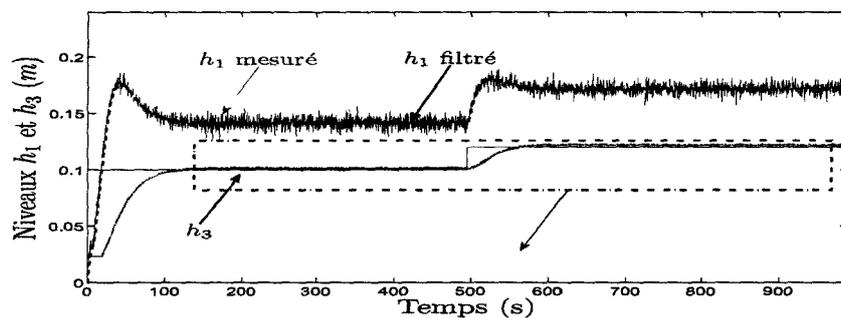
$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\mu(t-t_0)} \quad (3.154)$$

### 3.7 Résultats expérimentaux

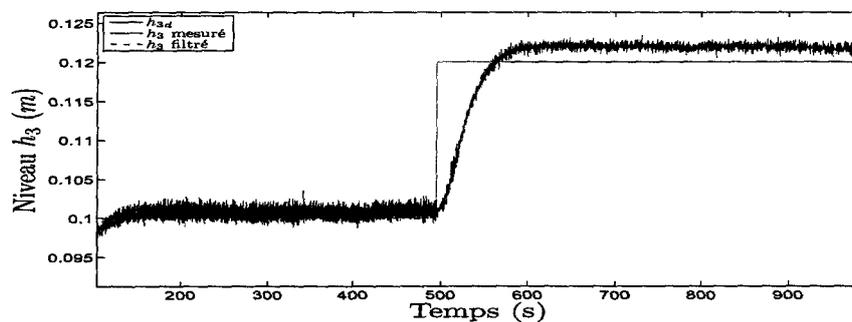
Pour visualiser le comportement dynamique transitoire du niveau commandé, nous avons appliqué un signal de référence de type échelon d'amplitude  $0.1m$ , puis à  $t = 500s$ , nous imposons une référence d'amplitude  $0.12m$ . Le premier test concerne le système dans le cas nominal, en supposant qu'il n'y a pas de fuite, et que les vannes  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$  sont ouvertes et la vanne  $a_{z3}$  est fermée.



(a)

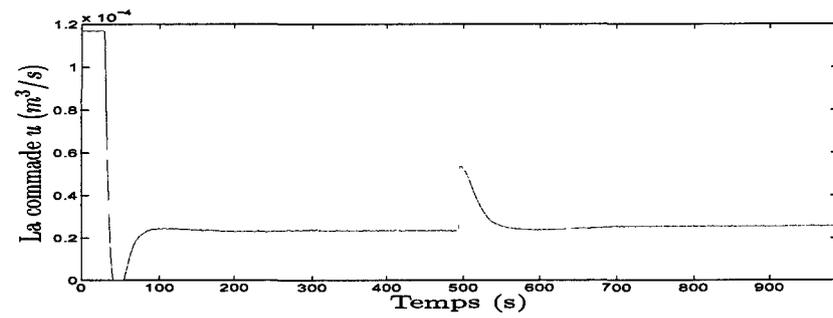


(b)

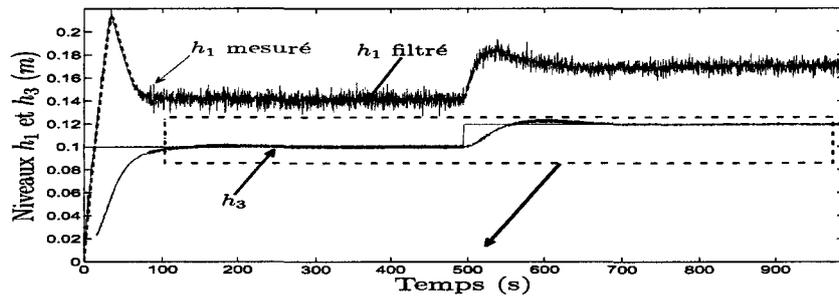


(c)

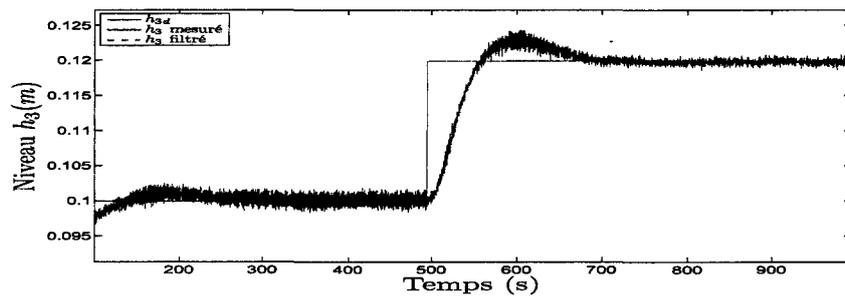
Figure 3.5 : Résultats expérimentaux avec la CBC sans perturbations extérieures ni paramètres incertains



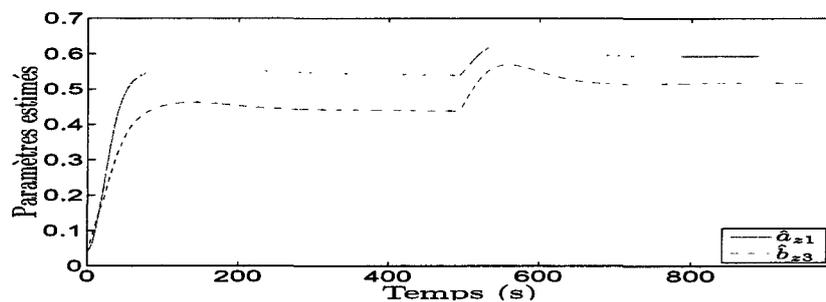
(a)



(b)



(c)

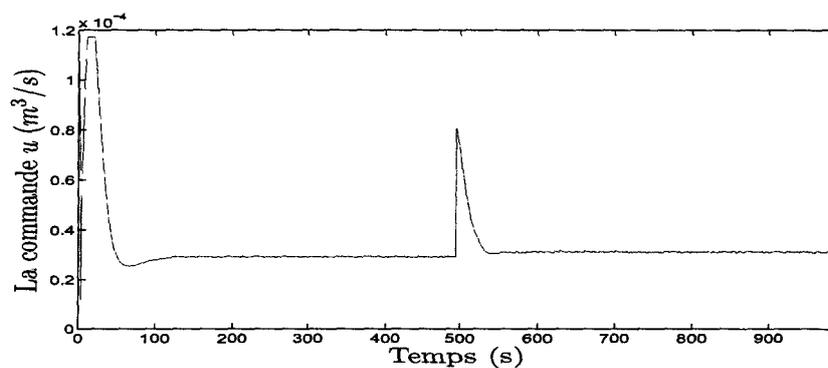


(d)

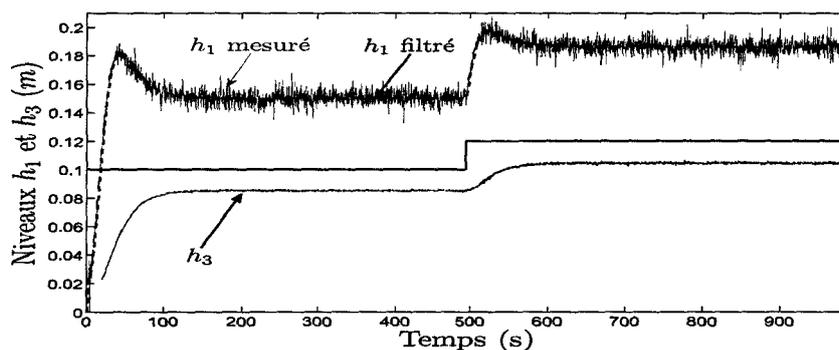
Figure 3.6 : Résultats expérimentaux avec la CBC sans perturbations extérieures ni paramètres incertains

La figure 3.5 montre les résultats obtenus en utilisant la CBC sans perturbation, on remarque à la figure 3.5(c) la sensibilité de la commande envers le changement de consigne à  $t = 500s$  (apparition d'une erreur de  $0.01m$ ).

La figure 3.6 montre les résultats expérimentaux de la commande adaptative sans perturbations extérieures, les figures 3.6(b) et 3.6(d) montrent respectivement le niveau et les paramètres estimés du modèle de deux colonnes. Nous remarquons une bonne régulation de niveau. L'erreur de suivi de niveau est très faible (erreur maximale égale à  $0.01mm$ ). Pour montrer l'intérêt de notre technique de commande, nous nous proposons d'étudier les performances de la commande par rapport aux perturbations extérieures. Pour ce faire nous avons utilisé la colonne 2 pour créer des perturbations extérieures par l'ouverture de la Vanne  $a_{z3}$  à  $t = 0s$ , voir figure 1.15.

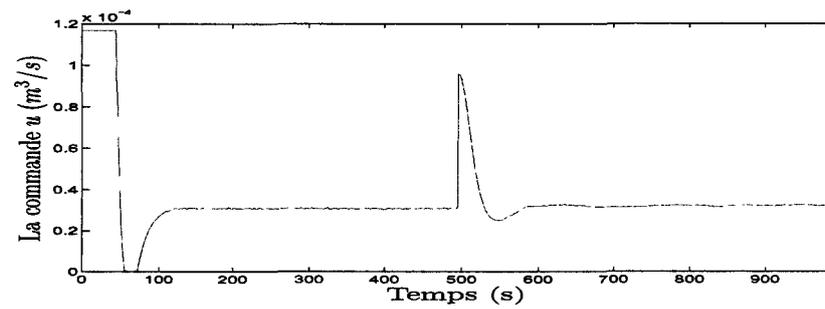


(a)

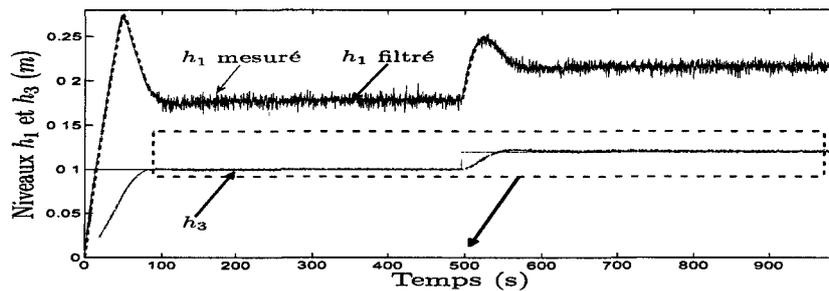


(b)

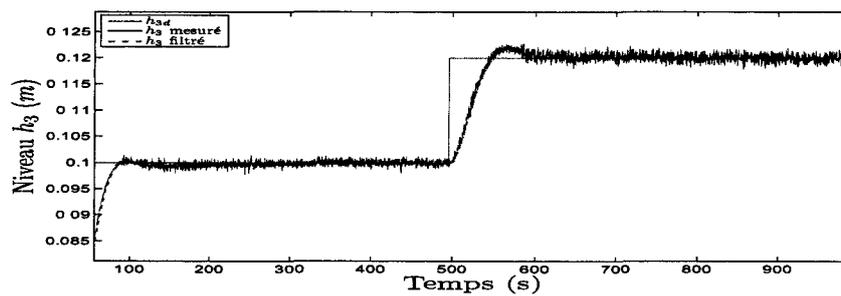
**Figure 3.7 :** Résultats avec la CBC en présence de paramètres incertains  $a_{z1} = 0.5\hat{a}_{z1}$  et des perturbations extérieures  $q_{ext} = 0.5 \cdot 10^{-4} (m^3/s)$



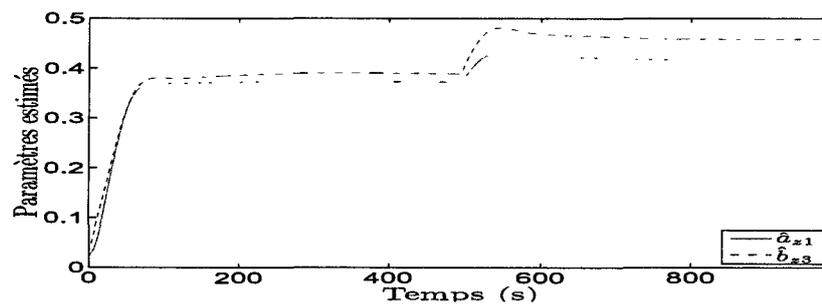
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure 3.8** : Résultats avec la CBA en présence de paramètres incertains  $a_{z1} = 0.5\hat{a}_{z1}$  et des perturbations extérieures  $q_{ext} = 0.5 \cdot 10^{-4} (m^3/s)$ .

Toutefois, lorsqu'on introduit une fuite au niveau de la colonne 3 à  $t = 0$ , à travers l'ouverture de la vanne  $a_{z3}$ , les résultats sont assez différents. La commande classique par backstepping présente une grande erreur sous la variation paramétrique et les perturbations extérieures (figure 3.7).

La figure 3.8(b) montre bien que le niveau du liquide est stabilisé autour de la référence imposée malgré la présence de perturbations et les couplages entre les colonnes (variations paramétriques). La figure 3.8(a) montre la réaction de notre commande CBC pour garder la valeur de la sortie à  $x_{2d} = 0.12m$ . La sortie est toujours maintenue, ce qui montre les bonnes performances de notre loi de commande par rapport aux perturbations extérieures. Les commandes appliquées au moteur de la pompe, dans les deux cas, sont illustrées dans la figure 3.7(a) et 3.8(a). On constate que le phénomène de réticence est pratiquement inexistant dans les signaux de commande. Les commandes sont physiquement acceptables. En effet, la CMG d'ordre un [Utk97] des systèmes non linéaires incertains a été limitée par la présence du "chattering". Ce phénomène risque d'entraîner des crépitements du moteur utilisé par la pompe lorsque l'amplitude des variations est trop importante. C'est pourquoi la CBA d'un système hydraulique incertain est une bonne solution pour résoudre le problème du "chattering".

## 3.8 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté le concept "backstepping", concept qui s'applique couramment à la commande des systèmes dont la modélisation est triangulaire. Nous avons ensuite étudié l'extension de cette technique à la commande d'un système hydraulique dont le comportement n'est pas de type strict feedback. Cette étude nous a conduit à l'élaboration d'un nouvel algorithme par backstepping adaptatif appliqué au contrôle d'un système hydraulique dont les paramètres sont incertains et variables dans le temps. Nous avons montré que ce type d'approche pourrait être avantageusement utilisé pour compenser les incertitudes du système non linéaire à partir de paramètres inconnus. Les résultats expérimentaux montrent en effet un bon suivi de trajectoires du niveau de l'eau, et ceci même en présence des paramètres non linéaires incertains dus aux variations des volumes dans les vannes. Comparée aux lois de commande présentées au chapitre

précédent, celle développée ici permet de s'affranchir :

- d'une "surparamétrisation" que l'on peut observer dans la méthode proposée par [HHVM05].
- d'un algorithme d'adaptation indirecte pour l'estimation des valeurs de  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$ .
- d'une étape de transformation du modèle dynamique associé au système hydraulique en un modèle sous forme "strict feedback"

Pour des applications pratiques, la loi de commande ABMG que nous préconisons semble mieux adaptée que d'autres méthodes de commande.

# Chapitre 4

## Combinaison du backstepping adaptatif avec les modes glissants

### Introduction

La conception de lois de commande des systèmes non linéaires incertains est généralement fondée sur une association de techniques ayant conduit à plus de robustesse telles que : le backstepping, et les lois de commande polynômiales auto-ajustables et adaptatives. Lorsque le système physique comprend des incertitudes avec un manque d'informations sur les bornes inconnues des paramètres, la commande adaptative devient plus convenable, tandis que, si des informations sont suffisantes sur l'incertitude, comme la connaissance des bornes supérieures, les commandes robustes sont faciles à concevoir.

Le problème de stabilisation a été étudié pour différentes classes de systèmes avec incertitudes au cours de ces dernières années [BL82], [Qu92]. La plupart des approches de conception de commande sont basées sur Lyapunov et sur les méthodes de linéarisation. Dans l'approche de Lyapunov, il est très difficile de trouver une fonction de Lyapunov pour concevoir la loi de commande et stabiliser le système. L'approche de linéarisation assure la stabilité locale. L'approche de backstepping présente une méthode systématique pour concevoir une commande pour suivre un signal de référence en choisissant une fonction de Lyapunov appropriée et en changeant les coordonnées [KKK91], [KKM91]; elle garantit la stabilité asymptotique globale. La CMG est une méthode de contrôle robuste et on peut considérer que le concept backstepping est une méthode de commande adaptative. La

combinaison adaptative backstepping CMG, rassemble des avantages des deux approches. Cette méthode peut être utilisée même si le système ne comprend pas de paramètres inconnus. La méthode du backstepping pour concevoir la CMG pour une classe de systèmes non linéaires sans incertitude, a été présentée par Rios-Bolvar et Zinober [RBZ98], [RBZ97]. La commande adaptative backstepping mode de glissement des systèmes à réaction semi-stricts (RSS) [Yao97] a été étudiée par Koshkouei et Zinober [KZ99].

Dans ce chapitre, une procédure de conception systématique est proposée pour combiner la commande adaptative et les techniques CMG pour une classe de systèmes non linéaires. Nous développons une approche de backstepping dédiée aux systèmes RSS avec l'incertitude mal adaptée, où l'on cherche à rapprocher les trajectoires d'état à une hypersurface spécifiée. Ces méthodes systématiques ne nécessitent ni de condition supplémentaire sur les paramètres ni de condition suffisante garantissant la stabilité du système. Un ensemble de tests est effectué pour valider la stratégie de commande adaptative proposée. Un deuxième algorithme associant la commande par modes glissants d'ordre deux et la technique de stabilisation par backstepping est également proposé. Cet algorithme bien adapté pour des systèmes non linéaires incertains permet de garantir l'établissement d'un régime glissant d'ordre deux avec un réglage simple des paramètres de la loi de commande. L'efficacité de cette stratégie de commande est illustrée par des tests expérimentaux sur un système hydraulique à 3 cuves, système fortement non linéaire.

## 4.1 Systèmes non linéaires incertains

Considérons un système non linéaire incertain

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + \Delta f(x, w) + g_0(x)u \quad (4.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u$  est la commande scalaire,  $w \in \Omega$  représente le paramètre incertain variable dans le temps,  $f_0$  et  $g_0$  sont les champs de vecteur lisses connus sur  $B_x$  (le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est dans le voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ), et  $\Delta f$  est un champ de vecteur inconnu sur  $B_x$ . En outre, sans perte de généralité on suppose que  $\Delta f(x_0, w) = 0$  pour tout  $w \in \Omega$  et  $g(x_0) \neq 0$ .

**Hypothèse 4.1.** (*Linéarisation exacte entrée-état*) On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, ad_{f_0}g, \dots, ad_{f_0}^{m-1}g\})) = n, \quad \forall x = x_0 \quad (4.2)$$

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, ad_{f_0}g, \dots, ad_{f_0}^{m-2}g\})) = n - 1, \quad \forall x \in B_x \quad (4.3)$$

où *inv* signifie la distribution involutive.

C'est à dire qu'un système avec une seule entrée est linéarisable entrée-état si, et seulement si, la distribution engendrée par  $(g, ad_{f_0}g, \dots, ad_{f_0}^{m-1}g)$  est de plein rang et que celle engendrée par  $(g, ad_{f_0}g, \dots, ad_{f_0}^{m-2}g)$  est involutive.

**Hypothèse 4.2.** (*La condition de commandabilité*)

$$\dim(\text{inv}(\text{span}\{g, ad_{\tilde{f}}g, \dots, ad_{\tilde{f}}^{m-1}g\})) = n, \quad \forall x = x_0 \quad (4.4)$$

où  $\tilde{f} = f_0 + \Delta f$

Si les conditions d'existence sont satisfaites [Isi89], il existe une fonction  $\Psi_1(x)$  telle que :

$$\Delta\Psi_1 ad_{f_0}^i = 0 \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (4.5)$$

$$\Delta\Psi_1 ad_{f_0}^{m-1} \neq 0 \quad (4.6)$$

La transformation linéarisante  $\Psi(x)$  est donnée comme suit :

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ L_f \Psi_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \Psi_1(x) \end{bmatrix}$$

et la commande linéarisante :

$$u = \alpha(x) + \gamma(x)u \quad (4.7)$$

avec :

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \Psi_1}{L_g L_f^{n-1} \Psi_1} \quad \gamma(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \Psi_1} \quad (4.8)$$

Avec cette loi de commande, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \eta_1(z, w) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n + \eta_{n-1}(z, w) \\ \dot{z}_n &= f(z) + \eta_n(z, w) + g(z)u \end{aligned} \quad (4.9)$$

Notez que la forme du système (4.9) est plus générale.

## 4.2 Combinaison du backstepping avec le mode glissant

Dans cette section, nous discutons une technique de conception basée sur la combinaison du backstepping avec les modes glissants pour les systèmes incertains multi-variables. La loi de commande est synthétisée pour les systèmes tridimensionnels dans le premier cas dans un souci de simplicité (section 4.2.1), les résultats pour les systèmes multidimensionnels étendus seront donnés par la suite dans la section 4.2.2.

### 4.2.1 Systèmes tridimensionnels

On considère le système non-linéaire incertain tridimensionnel de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \eta_1(x, w) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \eta_2(x, w) \\ \dot{x}_3 &= f(x) + \eta_3(x, w) + g(x)u\end{aligned}\tag{4.10}$$

satisfaisant les hypothèses 4.1 et 4.2.

**Hypothèse 4.3.** *Les incertitudes dans le système (4.10) satisfont les conditions de bornitude :*

$$\begin{aligned}|\eta_1(x, w)| &\leq d_1(x_1, x_2) \\ |\eta_2(x, w)| &\leq d_2(x_1, x_2, x_3) \\ |\eta_3(x, w)| &\leq d_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{4.11}$$

pour tout  $w \in \Omega$  où  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont des fonctions non négatives différentiables connues, et

$$\text{sign}(x_1)d_1(x_1, x_2) + x_2 \neq 0\tag{4.12}$$

Nous considérons le système étendu correspondant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \eta_1(x, w) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \eta_2(x, w) \\
 \dot{x}_3 &= f(x) + \eta_3(x, w) + g(x)u \\
 \dot{u} &= v
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

**Étape 0** : Définissons la première variable d'erreur  $z_1 = x_1$  et écrivons sa dérivée par rapport au temps qui est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \eta_1 \tag{4.14}$$

avec  $z_2 = x_2 - \alpha_1$ .

**Étape 1** : Maintenant, nous employons  $\alpha_1$  comme commande virtuelle pour stabiliser le sous-système unidimensionnel (4.14), pour cela nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{k_1}{2} z_1^2 \tag{4.15}$$

où  $k_1$  est une constante positive. La première fonction stabilisante peut maintenant être choisie comme suit :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1) \tag{4.16}$$

$\alpha_1$  existe à partir de l'hypothèse 4.3, et  $c_1$  est une constante positive. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= k_1 z_1 (z_2 + \alpha_1 + \eta_1) \\
 &\leq -k_1 c_1 z_1^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

pour  $x_2 = \alpha_1$ , c'est à dire  $z_2 = 0$ .

**Étape 2** : à partir de la dernière variable d'erreur  $z_3 = x_3 - \alpha_2$ , on peut exprimer la dynamique de  $z_1$  en fonction de  $z_2$  et celle de  $z_2$  en fonction de  $z_3$  :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 + \alpha_1 + \eta_1 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 + \alpha_2 + \eta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} (z_2 + \alpha_2 + \eta_1)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Choisissons ensuite une fonction candidate de Lyapunov sous la forme suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{k_2}{2} z_2^2 \tag{4.18}$$

où  $k_2$  est une constante positive. Puisque  $d_1$  est différentiable, il existe une fonction  $\phi_1$  telle que :

$$d_1(z_1, z_2 + \alpha_1) = d_1(z_1, \alpha_1) + z_2 \phi_1(z_1, z_2) \quad (4.19)$$

à partir de :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 = \gamma_1(z_1, z_2) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \eta_1 \quad (4.20)$$

avec :

$$\gamma_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} [z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1)] \quad (4.21)$$

La deuxième fonction stabilisante peut être choisie afin de stabiliser la dynamique de (4.17) comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & - \frac{k_1}{k_2} z_1 (1 + \text{sign}(z_1) \phi_1(z_1, z_2)) - \gamma_1(z_1, z_2) \\ & - c_2 z_2 - \text{sign}(z_2) d_2(z_1, z_2 + \alpha_1, \alpha_2) \\ & - \text{sign}(z_2) \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \right| d_1(z_1, z_2 + \alpha_1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pour  $x_3 = \alpha_2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + k_2 z_2 \dot{z}_2 \\ &\leq -k_1 c_1 z_1^2 - k_2 c_2 z_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

dont la négativité assure la stabilité de l'origine (4.17).

### Étape 3 :

Dans cette étape finale, la loi de commande réelle  $v$  sera déterminée. La dynamique pour la dernière étape peut être déterminée en prenant la dérivée de l'expression  $z_3 = x_3 - \alpha_2$ , et en substituant l'équation (4.13), dans le résultat. La dynamique transformée combinée du système entier peut alors être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1) + \eta_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - c_2 z_2 - \frac{k_1}{k_2} z_1 + A(z_1, z_2) + \eta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \eta_1 \\ \dot{z}_3 = f + \eta_3 + g u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} (z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1) + \eta_1) \\ \quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \left( z_3 - c_2 z_2 - \frac{k_1}{k_2} z_1 + A(z_1, z_2) + \eta_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \right) \\ \dot{u} = v \end{cases} \quad (4.23)$$

avec :

$$A = -|z_1| \frac{k_1}{k_2} \phi_1 - \text{sign}(z_2) d_2(z_1, z_2 + \alpha_1, \alpha_2) - \text{sign} \left( z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} d_1(z_1, z_2 + \alpha_1) \quad (4.24)$$

De la même façon que (4.19), en raison de la différentiabilité de  $d_2$ , il existe une fonction  $\phi_2$  telle que :

$$d_2(z_1, z_2 + \alpha_1, z_3 + \alpha_2) = d_2(z_1, z_2 + \alpha_1, \alpha_2) + z_3 \phi_2(z_1, z_2 + \alpha_1, z_3) \quad (4.25)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov  $V_3$ , qui est la fonction  $V_2$  augmentée par un terme d'erreur en  $z_3$  et une surface de glissement  $s$  :

$$V_3 = V_2 + \frac{k_3}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} s^2 = \frac{k_1}{2} z_1^2 + \frac{k_2}{2} z_2^2 + \frac{k_3}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} s^2 \quad (4.26)$$

Afin de commencer la conception de la commande pour la dernière étape, une surface de glissement est choisie telle que :

$$\begin{aligned} s &= c_3 z_3 + f + gu - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} (z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} \left( z_3 - c_2 z_2 - \frac{k_1}{k_2} z_1 + A \right) \\ &\quad + \text{sign}(z_3) \left[ d_3 + \left| \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \right| d_2 + |B| d_1 \right] \\ &\quad + \frac{k_2}{k_3} (z_2 + |z_2| \phi_2(z_1, z_2 + \alpha_1, z_3)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec :

$$B(z_1, z_2) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1}$$

et  $c_3$  est une constante strictement positive. Avec la définition précédente de  $V_3$  et de  $s$ , on obtient :  $\dot{V}_3 \leq -k_1 c_1 z_1^2 - k_2 c_2 z_2^2 - k_3 c_3 z_3^2 + k_3 z_3 s + s \dot{s}$ .

Soit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} D_1 &= z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1) \\ D_2 &= z_3 - c_2 z_2 - \frac{k_1}{k_2} z_1 + A \\ D_3 &= -\frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} (z_2 - c_1 z_1 - \text{sign}(z_1) d_1(z_1, \alpha_1)) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \left( c_2 z_2 + \frac{k_1}{k_2} z_1 - z_3 - A \right) + f + gu \end{aligned}$$

La dynamique de la surface de glissement est trouvée en prenant la dérivée de l'équation (4.27), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial s}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial s}{\partial z_3} \dot{z}_3 + g v \\ &= D + B_1 \eta_1 + B_2 \eta_2 + B_3 \eta_3 + g v \end{aligned} \quad (4.28)$$

où  $D$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B$  sont des fonctions connues. En substituant (4.28) dans l'inégalité  $\dot{V}_3$ , la loi de commande étendue  $v$  peut être choisie comme :

$$v = -\frac{1}{g} (k_3 z_3 + D + \text{sign}(s) [|B_1|d_1 + |B_2|d_2 + |B_3|d_3 + M]) \quad (4.29)$$

En notant qu'on suppose que  $g(z)$  satisfait  $g(z) \neq 0$ , pour  $\|z\| \neq 0$ . Finalement nous déterminons  $M$  tel que :

$$s\dot{s} < 0 \quad \text{pour} \quad s \neq 0, \quad |s| \geq \epsilon$$

à partir de (4.23)-(4.28), nous avons :

$$s\dot{s} \leq -M|s| - k_3 s z_3$$

Puisque  $z_3$  est borné avec la commande  $v$  (4.31), il existe une constante positive  $F$

$$M = k_3 F + \delta$$

tels que  $|z| \leq F$  satisfait la condition d'atteinte  $s\dot{s} < -\delta|z|$  avec  $\delta$  tout nombre positif.

**Théorème 4.1.** *Supposons que  $g(z) \neq 0$ , alors la loi de commande (4.29) du système en boucle fermée (4.23)-(4.28) a les solutions qui satisfont :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0 \quad (4.30)$$

*i.e. Le système est asymptotiquement stable. De plus, les fonction  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$  et  $s(t)$  sont bornées pour tous  $t \in \mathbb{R}$ .*

La commande discontinue  $v$  (4.29) peut produire le phénomène de broutement à proximité de la surface de glissement. Ce phénomène peut être éliminé en employant l'approximation continue [BZ86] au lieu de la fonction  $\text{sign}$  dans (4.29), c.-à-d :

$$v = -\frac{1}{g} \left( k_3 z_3 + D + \frac{s}{|s| + \phi} [|B_1|d_1 + |B_2|d_2 + |B_3|d_3 + M] \right) \quad (4.31)$$

où  $\phi$  représente l'épaisseur de la couche limite.

## 4.2.2 Procédure de conception pour le cas général

En suivant la même procédure détaillée dans la section précédente, Zinober [ZL96] a donné directement la fonction de Lyapunov finale :

$$V_n = \frac{k_1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{k_n}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} s^2 \quad (4.32)$$

où  $s$  est la fonction de glissement.

$$s = c_n z_n + f + gu + a_n - \text{sign}(z_n) \left\{ d_n + \left| \frac{\partial x_n^d}{\partial z_{n-1}} \right| d_{n-1} + \left| \frac{\partial x_n^d}{\partial z_{n-2}} + \frac{\partial x_n^d}{\partial z_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}^d}{\partial z_{n-2}} \right| d_{n-2} \right\} \\ - \dots - \text{sign}(z_n) \left\{ \left| \frac{\partial x_n^d}{\partial z_1} + \frac{\partial x_n^d}{\partial z_2} \left( -\frac{\partial x_n^d}{\partial z_1} + \dots \right) \right| d_1 \right\} \quad (4.33)$$

qui est une fonction connue (de  $(z, u)$ ), où  $c_n$  est une constante positive et

$$a_n = -\frac{\partial x_n^d}{\partial z_1} (z_2 + x_2^d) - \dots - \frac{\partial x_n^d}{\partial z_{n-1}} \left[ z_n + x_n^d - \frac{\partial x_{n-1}^d}{\partial z_{n-2}} (z_{n-1} + x_{n-1}^d - \dots) \right] \\ + \frac{k_{n-1}}{k_n} (z_{n-1} + |z_{n-1}| \phi_{n-1}) \quad (4.34)$$

Il est facile de vérifier que, lorsque la surface  $s = 0$  est atteinte, le système résultant est asymptotiquement stable à l'égard de la fonction de Lyapunov  $V_n = \frac{1}{2}(k_1 z_1^2 + \dots + k_n z_n^2)$ .

La commande  $u$  sur la surface de glissement, notée par  $u_s$ , peut être obtenue directement à partir  $s = 0$ . Depuis :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial s}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \dots + \frac{\partial s}{\partial z_n} \dot{z}_n + gv \\ = D + B_1 \eta_1 + B_2 \eta_2 + \dots + B_n \eta_n + gv \quad (4.35)$$

où  $D, B_1, \dots, B_n$  sont des fonctions connues non données ici pour la brièveté [ZL96].

Substituant  $s$  dans l'inégalité de  $\dot{V}_n$ , la loi de commande

$$v = -\frac{1}{g} \left( k_n z_n + D + \text{sign}(s) \left[ \sum_{i=1}^n |B_i| d_i + M \right] \right) \quad (4.36)$$

rend la dérivée de  $V_n$  négative bien déterminée.  $M$  est un nombre positif qui peut être déterminé de la même façon que dans la section 4.2.1. Nous utilisons de nouveau la loi de commande modifiée suivante pour "atténuer" le broutement provoqué par la fonction  $\text{sign}$  dans (4.29).

$$v = -\frac{1}{g} \left( k_n z_n + D + \frac{s}{|s| + \phi} \left[ \sum_{i=1}^n |B_i| d_i + M \right] \right) \quad (4.37)$$

où  $\phi$  représente l'épaisseur de la couche limite.

### 4.3 Procédure de conception de la CBAMG

La procédure par backstepping est une méthode systématique pour la conception de la commande des systèmes non linéaires sous forme de rétroaction stricte [KKK95],

[KKM91]. Elle est utilisée pour résoudre le problème de stabilisation d'une classe des systèmes non linéaires sous la forme dite paramétrique stricte [NA88], [ZW95]. Les propriétés de poursuite et de régulation obtenues avec un tel système sont globales [FL01]. Les équations de ce système sont données alors par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + \theta^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) = \psi_0(x(t)) + \theta^T \psi_n(x(t)) + \beta(x(t)) u(t) \end{cases} \quad (4.38)$$

avec  $x(t) = [x_1, \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$  est un vecteur constant de paramètres inconnus, et  $\psi_i(x(t)) \in \mathbb{R}^p$ ,  $\beta_0(x(t)) \in \mathbb{R}$  sont les fonctions non linéaires lisses connues. L'objectif, pour l'instant, est de stabiliser le système autour du point d'équilibre  $x_1^e = 0$ ,  $x_{i+1}^e = -\theta^T \psi_i^e = -\theta^T \psi_i(0, -\theta^T \psi_1^e, \dots, -\theta^T \psi_{i-1}^e)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Notons que l'extension du problème de suivi est réellement différent, mais pour des raisons de clarté, seul le problème de stabilisation est considéré. La procédure par backstepping consiste en construction étape-par-étape d'un système transformé avec l'état  $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $\alpha_i$  sont les signaux de commande virtuels à l'étape de conception  $i$ . Ils sont calculés à l'étape  $i+1$  pour conduire  $z = [z_1, \dots, z_n]^T$  à l'état d'équilibre  $(0, \dots, 0)$ . La stabilité est assurée par une analyse standard de Lyapunov. Les fonctions de Lyapunov calculées étape par étape sont utilisées pour déterminer  $\alpha_i$  et celle qu'on appelle *fonction de réglage*  $\tau_i$ , est une formule partielle pour la mise à jour adaptative du vecteur de paramètre. La dernière fonction stabilisante  $\alpha_n$ , est la vraie commande  $u(t)$  qui est appliquée directement sur le système d'origine (4.70). Dans la suite, la procédure de conception sera brièvement décrite pour la commodité du lecteur.

*Etape  $i$*  : soit  $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$  ( $i = 0, \dots, n-1, \alpha_0 = 0$ ) et substituons dans  $\dot{x}_i = x_{i+1} + \theta^T \psi_i$ , on obtient :

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + \hat{\theta}^T \psi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \theta^T \psi_k) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$$

Le système partiel dans les coordonnées  $z_k$ , avec  $k = 1, \dots, i$  est stabilisé en respectant la fonction de Lyapunov

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i z_k^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta})$$

où  $\hat{\theta}(t)$  est l'estimation du vecteur de paramètres inconnus  $\theta$  et  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice définie positive. La stabilité de Lyapunov est assurée en mettant :

$$\alpha_i = -z_{i-1} - c_i z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_i + \left[ \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T \right] \left( \psi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \tau_i &= \Gamma \sum_{l=1}^i z_l \left( \psi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \\ &= \tau_{i-1} + \Gamma z_i \left( \psi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

où  $\tau_i$  est la fonction de réglage à l'étape  $i$ . Si l'étape  $i$  est considérée comme une dernière étape, avec  $\hat{\theta} = \tau_i$  et  $z_{i+1}$ , alors  $\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^i c_k z_k^2 \leq 0$ , cette dernière étape  $i$  contient des termes incertains. Ils seront éliminés à l'étape  $i + 1$ .

*Étape  $n$  :*

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= -\sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + \left( \sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}}) \\ &+ z_n \left[ z_{n-1} + \beta_0 u + \psi_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \hat{\theta}^T \left( \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \right] \\ &- (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} \left[ \dot{\hat{\theta}} - \Gamma \sum_{l=1}^n z_l \left( \psi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

L'expression complète de  $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$  pourrait être interprétée comme une adaptation de surface de mode glissant dans l'espace d'état d'origine alors un mode de glissement peut être généré par le remplacement de  $z_n$  dans l'équation (4.41), avec le terme  $z_n + h \text{sign}(z_n)$  [SRZA93]. Plus précisément, dénotant  $s$  la surface de glissement, on a  $s = z_n$ . Ainsi, en choisissant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\beta_0} \left[ -z_{n-1} - k(s + h \text{sign}(s)) - \psi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n \right. \\ &\left. + \left( \sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T \right) \left( \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} = \tau_n &= \Gamma \sum_{l=1}^n z_l \left( \psi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \psi_k \right) \\ &= \tau_{n-1} + \Gamma s \left( \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_n} \psi_k \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

On obtient  $\dot{V}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} c_j z_j^2 - s^2 - k|s|$ . La convergence de la sortie vers la trajectoire désirée peut être prouvée en utilisant le théorème d'invariance de LaSalle B.1. Par conséquent, la stabilité est garantie et le suivi asymptotique de la sortie est réalisé. En outre, la condition  $s\dot{s} < 0$  assure qu'un mode glissant est produit sur la surface de glissement  $s = 0$ .

## 4.4 Application de la CBAMG au système hydraulique

Dans cette section, nous discutons une technique de conception par backstepping adaptatif combiné avec le mode glissant pour un système incertain non-linéaire.

L'objectif est de concevoir une commande par backstepping adaptatif mode de glissement (CBAMG) capable de conduire asymptotiquement la sortie  $x_2$  vers sa référence désirée  $x_{2d}$ .

### 4.4.1 Conception de la commande

Les difficultés à concevoir une commande très performante pour le système décrit dans l'équation (3.130) proviennent du fait que plusieurs paramètres inconnus et perturbations sont liés aux incertitudes et au coefficient d'écoulement, comme indiqué dans (1.100). Nous verrons comment nous surmontons ces difficultés en utilisant la combinaison du mode glissant avec le backstepping adaptatif.

On suppose que les coefficients d'écoulement de fuite  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$  sont les paramètres inconnus du système :

$$\begin{aligned} a_{z1} &= \hat{a}_{z1} + \tilde{a}_{z1} \\ b_{z3} &= \hat{b}_{z3} + \tilde{b}_{z3} \end{aligned} \quad (4.44)$$

où  $\hat{a}_{z1}$  et  $\hat{b}_{z3}$  sont les valeurs nominales connues du coefficient d'écoulement et du coefficient de débit de fuite respectivement.  $\tilde{a}_{z1}$  et  $\tilde{b}_{z3}$  sont les différences entre les valeurs réelles et les valeurs nominales de ces paramètres inconnus.

**Étape 1** : Tout d'abord, nous commençons notre conception par définir l'erreur de suivi

du niveau du liquide :

$$z_1 = x_2 - x_{2d} \quad (4.45)$$

Et sa dynamique peut être obtenue de (4.45) par :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} \\ &= a_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - b_{z3}\beta\sqrt{x_2} + \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (4.46)$$

En utilisant la méthode de conception par backstepping, nous considérons le terme  $\hat{a}_{z1}\alpha\sqrt{(x_1 - x_2)}$  comme notre commande virtuelle et spécifions son comportement désiré comme suit :

$$\xi = \hat{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2} - k_1 z_1 - \dot{x}_{2d} \quad (4.47)$$

où  $k_1$  est une constante positive.  $\xi$  s'appelle la fonction stabilisante dans la terminologie de conception par backstepping.

Maintenant, en substituant  $z_2 = \hat{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \xi$  et (4.47) dans (4.46) on obtient la dynamique de l'erreur en boucle fermée :

$$\dot{z}_2 = z_2 - k_1 z_1 + \tilde{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \tilde{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2} \quad (4.48)$$

Pour surmonter le problème de surparamétrisation, nous reportons le choix de la loi de mise à jour de  $\hat{a}_{z1}$  et de  $\hat{b}_{z3}$  à la prochaine étape.

**Étape 2 :** La deuxième variable d'erreur est définie comme suit :

$$z_2 = \hat{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \xi(x_2, \dot{x}_{2d}) \quad (4.49)$$

En utilisant les équations (4.45) et (4.47), la dérivée de cette nouvelle variable est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) - \hat{a}_{z1}\tilde{a}_{z1}\alpha^2 + \frac{\hat{a}_{z1}\tilde{b}_{z3}\alpha\beta}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 - x_2}} \\ &\quad + \frac{\tilde{a}_{z1}\hat{b}_{z3}\alpha\beta}{2} \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\hat{b}_{z3}\tilde{b}_{z3}\beta^2}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \\ &\quad + v_1 + v_2 + k_1(\tilde{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \tilde{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont des fonctions connues données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{\hat{a}}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} \\ v_2 &= -\dot{\hat{b}}_{z3}\beta\sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

et  $f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3})$  est une fonction connue définie par :

$$f = \frac{\hat{a}_{z1}\hat{b}_{z3}\alpha\beta}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \frac{\hat{b}_{z3}^2\beta^2}{2} - \hat{a}_{z1}^2\alpha^2 - \ddot{x}_{2d} \quad (4.52)$$

$$+ k_1(\hat{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} - \hat{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) \quad (4.53)$$

Il est à noter que les paramètres du système de 3 colonnes sont supposés inconnus, mais constants [BCABC08] :

$$\tilde{a}_{z1} = a_{z1} - \hat{a}_{z1}, \tilde{b}_{z3} = b_{z3} - \hat{b}_{z3}, \dot{\tilde{a}}_{z1} = -\dot{\hat{a}}_{z1}, \dot{\tilde{b}}_{z3} = -\dot{\hat{b}}_{z3} \quad (4.54)$$

Pour obtenir la CBAMG et la loi d'adaptation des paramètres inconnus  $a_{z1}$  et  $b_{z3}$ , nous définissons la FCL pour le système en boucle fermée comme suit :

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}^2 \quad (4.55)$$

Avec la surface de glissement :

$$s = c_1z_1 + z_2 \quad (4.56)$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont les gains d'adaptation et  $c_1$  est une constante positive.

En utilisant (4.48) et (4.50), la dérivée de  $V_2$  est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1\dot{z}_1 + s\dot{s} - \gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}\dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}\dot{\tilde{b}}_{z3} \\ &= -k_1z_1^2 + z_1z_2 + s\dot{s} + z_1\tilde{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1 - x_2} \\ &\quad - z_1\tilde{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2} - \gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}\dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}\dot{\tilde{b}}_{z3} \end{aligned} \quad (4.57)$$

En prenant la dérivée de (4.48) et en substituant (4.48), (4.50) dans cette dérivée nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s \left( c_1(z_2 - k_1z_1) + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2A\sqrt{x_1 - x_2}}u + f + v_1 + v_2 \right) \\ &\quad - s \left[ \hat{a}_{z1}\alpha + \frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2}} + k_1\sqrt{x_1 - x_2} \right] \alpha\tilde{a}_{z1} \\ &\quad + s \left[ \frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 - x_2}} - k_1\sqrt{x_2} \right] \beta\tilde{b}_{z3} \\ &\quad + \left[ z_1\sqrt{x_1 - x_2} - \frac{\dot{\tilde{a}}_{z1}}{\gamma_1} \right] \alpha\tilde{a}_{z1} \\ &\quad + \left[ -z_1\sqrt{x_2} - \frac{\dot{\tilde{b}}_{z3}}{\gamma_3} \right] \beta\tilde{b}_{z3} \\ &\quad - k_1z_1^2 + z_1z_2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov,  $\dot{V}_2$  doit être une fonction définie négative. Pour cela la loi de commande est choisie comme :

$$u = -\frac{1}{g} \left( c_1(z_2 - k_1 z_1) + f + hs + K \text{sign}(s) + v_1 + v_2 \right) \quad (4.59)$$

où  $c_1$ ,  $k_1$  sont des constantes positives et  $g = \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2A\sqrt{x_1-x_2}} \neq 0$ . Les gains  $h$  et  $K$  peuvent être choisis de telle manière que l'erreur du système en boucle fermée converge rapidement vers zéro exponentiellement.  $\text{sign}(\cdot)$  désigne la fonction *signe*.

Dans l'équation (4.58), tous les termes contenant  $\tilde{a}_{z1}$  et  $\tilde{b}_{z3}$  ont été regroupés pour les éliminer. Les lois mises à jour sont déterminées comme :

$$\dot{\hat{a}}_{z1} = -\gamma_1 s \left[ \hat{a}_{z1}\alpha + \frac{\hat{b}_{z3}\beta \sqrt{x_1-x_2}}{2\sqrt{x_2}} - k_1\sqrt{x_1-x_2} \right] + \gamma_1 (z_1\sqrt{x_1-x_2}) \quad (4.60)$$

$$\dot{\hat{b}}_{z3} = \gamma_3 s \left[ \frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1-x_2}} - k_1\sqrt{x_2} \right] - \gamma_3 z_1\sqrt{x_2} \quad (4.61)$$

où  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$ .

**Remarque 4.1.** . Il y a deux incertitudes  $\tilde{a}_{z1}$  et  $\tilde{b}_{z3}$  : de ((4.60)) et ((4.61)). Chaque paramètre est estimée par une seule loi d'adaptation. Donc, il n'y a aucun surparamétrage, contrairement à ce qu'on peut trouver par exemple dans [HHVM05].

Le schéma du système de commande est indiqué à la figure (4.1).

Dans le paragraphe suivant, l'analyse de stabilité de la dynamique (4.46), (4.50) en boucle fermée est étudiée.

#### 4.4.2 Analyse de la stabilité

La loi de commande par BAMG (4.59) assure la stabilité exponentielle de l'erreur de suivi comme démontré par le théorème 4.1 suivant. Afin d'énoncer le résultat principal de cette section, définissant les notations suivantes :  $z(t) = [z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ .

**Théorème 4.1.** Avec la loi de commande non linéaire CBAMG développée en ((4.59)) et une surface de glissement stable définie par ((4.56)), la condition d'attractivité  $s\dot{s} < 0$

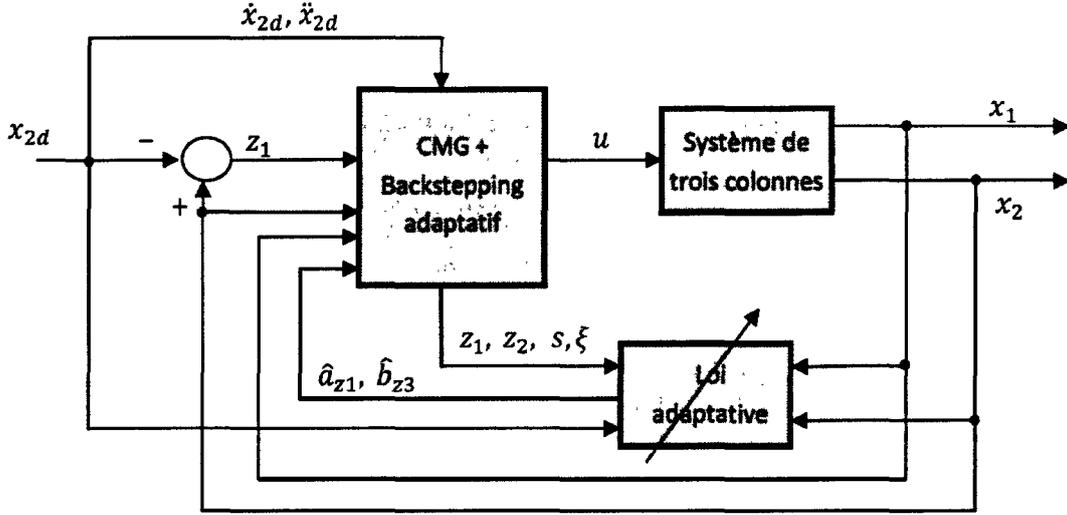


Figure 4.1 : Commande par backstepping mode glissant

est satisfaite. Alors, toutes les composantes  $z(t)$ ,  $z_1$  et  $z_2$ , convergent exponentiellement vers l'origine.

**Preuve :** Pour prouver le théorème, calculons la dérivée temporelle de ((4.55)) :

$$\dot{V}_2 = z_1 \dot{z}_1 + s \dot{s} - \gamma_1^{-1} \tilde{a}_{z1} \dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1} \tilde{b}_{z3} \dot{\tilde{b}}_{z3} \quad (4.62)$$

L'expression de cette dérivée le long des trajectoires ((4.48)), ((4.50)) du système global est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + s(-hs - K \text{sign}(s)) \\ &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - hs^2 - Ks \text{sign}(s) \\ &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - hs^2 - K|s| \end{aligned} \quad (4.63)$$

Nous pouvons récrire la formule ((4.86)) telle que :

$$\dot{V}_2 = -z^T Q z - K|s| \leq 0 \quad (4.64)$$

où  $Q$  est une matrice symétrique définie par

$$Q = \begin{bmatrix} k_1 + hc_1^2 & hc_1 - \frac{1}{2} \\ hc_1 - \frac{1}{2} & h \end{bmatrix}$$

Dans le but d'avoir  $\dot{V}_2 < 0$ ,  $Q$  doit être une matrice symétrique positive. Donc :

$$|Q| = h(k_1 + hc_1^2) - \left(hc_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = h(k_1 + c_1) - \frac{1}{4} > 0 \quad (4.65)$$

En choisissant des bonnes valeurs de  $h$ ,  $k_1$  et  $c_1$  nous pouvons mettre  $Q > 0$ .  $Q$  sera une matrice symétrique positive.

□

Définissant maintenant le terme suivant :

$$\Omega = z^T Q z + K|s| \leq -\dot{V}_2 \quad (4.66)$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau &= V_2(z_1(0), z_2(0)) - V_2(z_1(t), z_2(t)) \\ &= k_1 \int_0^t z_1^2(\tau) d\tau + k_2 \int_0^t z_2^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.67)$$

Puisque  $V_2(0)$  est bornée et  $V_2(t)$  est une fonction décroissante bornée, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau < \infty \quad (4.68)$$

Aussi  $\dot{\Omega}$  est bornée, ainsi par le lemme de Barbalat [Kha96], il peut être démontré que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega = 0$ . Cela implique que  $z_1$  et  $z_2$  convergent vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ . Pour éliminer le phénomène de broutement, la fonction *signe* dans l'expression de la CBAMG de l'équation ((4.59)), est remplacée par la fonction de saturation suivante :

$$sat(s) = \frac{s}{|s| + \delta} \quad (4.69)$$

où

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| \geq \phi \\ \delta_0 & \text{si } |s| < \phi \end{cases} \quad (4.70)$$

$\delta_0$  est une constante positive et  $\phi$  est l'épaisseur de la couche limite.

Pour cette application, deux types de commande sont appliqués à un système physique composé de trois réservoirs : la commande par mode de glissement classique avec la fonction d'adoucissement (*sat*) et la commande par backstepping adaptatif combiné avec le mode glissant. La loi de commande est obtenue à partir de l'équation (4.59). Pour

la CBAMG, les paramètres de réglages sont :  $\gamma_1 = 0.0144$ ,  $\gamma_3 = 0.0218$ ,  $k_1 = 0.001$ ,  $k_2 = 0.007$ . Les figures 4.2 et 4.3 présentent les résultats expérimentaux des deux lois de commande (CMG et CBAMG) sans perturbations extérieures. Nous pouvons constater que les deux stratégies régulent la sortie  $x_2$  parfaitement. La réponse du système a montré un suivi parfait, sans dépassement ni oscillation. La raison est que le système se comporte comme un système de premier ordre une fois qu'il est sur la surface de glissement. Les résultats obtenus en utilisant la CMG avec la fonction *sat* sont montrés à la figure 4.3. Les paramètres de commande qui ont donné la meilleure performance ont été fixés comme suit  $\lambda_{mg} = 25$  et  $k_{mg} = 5$ . Le résultat obtenu lorsque le gain de commutation est passé à 1 est

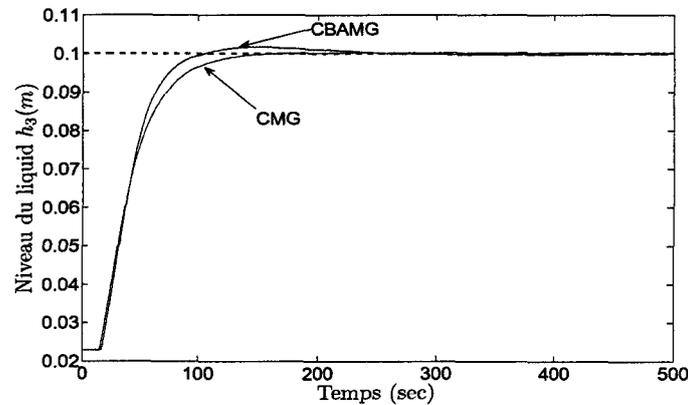


Figure 4.2 : Sortie du système en utilisant les deux méthodes

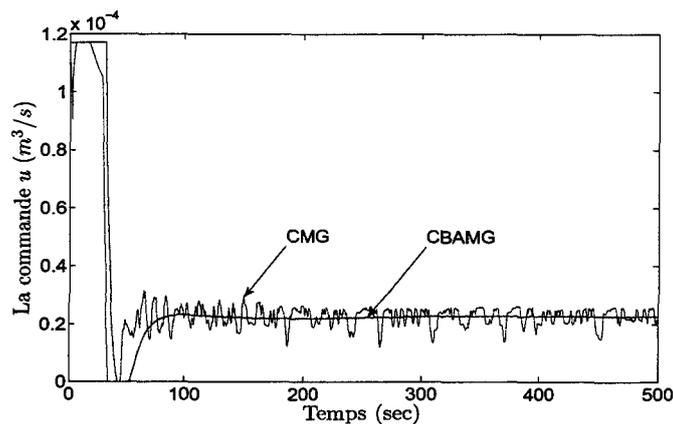


Figure 4.3 : Entrée du système en utilisant les deux méthodes

tracée dans la figure 4.3. Cette fois, nous avons obtenu un contrôle parfait comme dans le cas de la stratégie de commande proposée. Cependant, nous avons également obtenu

une commande très chahutée avec cette valeur, qui est extrêmement indésirable. Pour avoir une commande moins chahutée et assurer la robustesse de la commande nous allons prendre une valeur intermédiaire de 0.4.

Les signaux des commandes sont présentés dans la figure 4.3. On peut remarquer que le signal de commande CBAMG ne présente pas de broutement. A partir de cette courbe, nous pouvons voir que dès que le système est à l'extérieur de la surface de commutation  $s = 0$ , la commande conduira les états de système vers  $s$  et oblige ces états à rester et à évoluer sur cette surface (attractivité de la surface)[BMMCA<sup>+</sup>09].

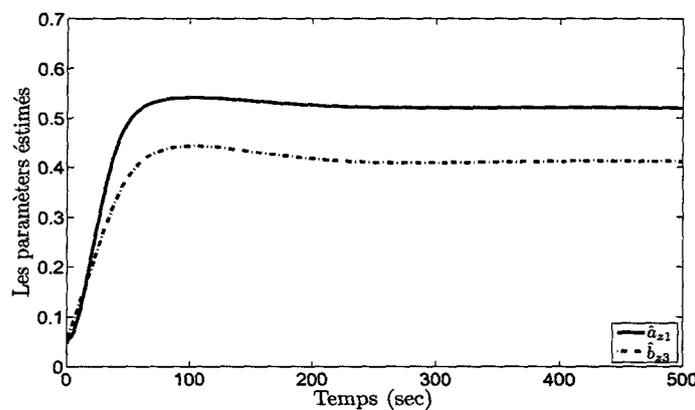


Figure 4.4 : Les paramètres estimés en utilisant la CBAMG

En comparant ces résultats à ceux obtenus par CBAMG, la combinaison du backstepping adaptatif a rendu la commande par mode de glissement capable de commander le système même si un petit gain de commutation est utilisé, et cela en utilisant l'adaptation des paramètres en temps réel (figure 4.4). Grâce à ce dernier, la commande ne présente pas de broutement malgré l'utilisation d'une couche limite très fine.

Le prochain test de performance, nous nous intéressons à la réponse du système en présence de perturbations externes. Pour introduire une perturbation, à  $t = 0$  on ouvre la vanne  $V_{a_{z_3}}$ . Les résultats obtenus par la CBAMG sont montrés dans figure 4.5. La sortie du système atteint l'état d'équilibre sans oscillation. Lorsqu'il existe des incertitudes et des perturbations extérieures, l'erreur en utilisant la commande CMG devient très importante et la stabilité asymptotique de  $s(t)$  n'est pas assurée à l'intérieur de la couche limite [SL91]. La commande par mode de glissement avec les fonctions d'adoucissement seules ne peut pas commander le système quand le gain de commutation de 0.1 est utilisé.

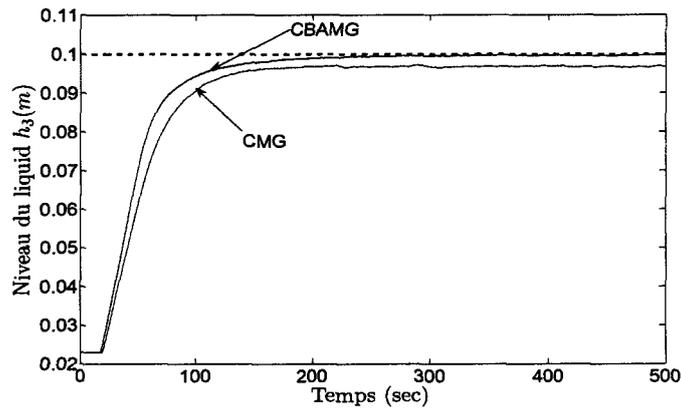


Figure 4.5 : Sortie du système en présence de perturbations

Quand ce dernier est augmenté à 1, l'erreur est considérablement réduite. Cependant, ceci est accompagné d'un broutement plus important sur le signal de commande 4.6.

Dans notre stratégie de commande proposée CBAMG, Le signal de commande est tou-

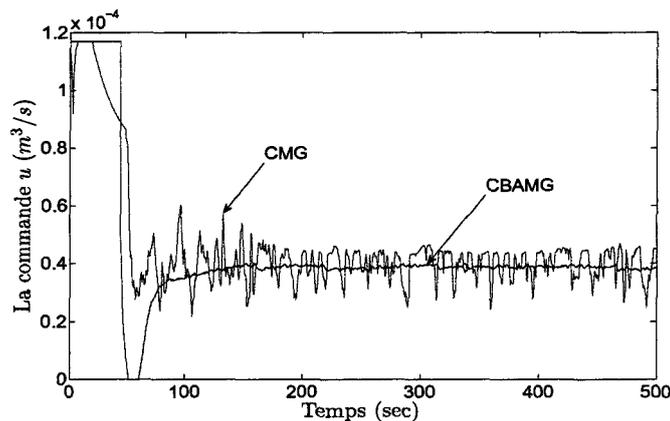


Figure 4.6 : Entrée du système en présence de perturbations

jours lisse et conduit les états du système à la surface de glissement  $s = 0$ . Aucune action intégrale n'a été nécessaire pour annuler l'erreur statique parce que les paramètres du backstepping ont été adaptés en ligne sans interruption pour réaliser une compensation des erreurs sur le modèle. Il est évident que la commande proposée a amélioré la performance dynamique et la performance à l'état d'équilibre de façon significative. Les résultats présentés sont obtenus sans modifier la valeur des gains de commande. A partir de ces expériences en temps réel, nous pouvons conclure que la commande non linéaire proposée en utilisant la combinaison entre le backstepping adaptatif et le mode glissant

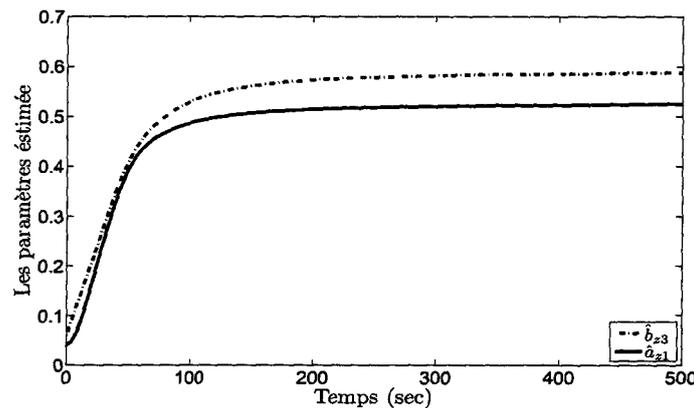


Figure 4.7 : Paramètres estimés du système perturbé

est très efficace sous des variations paramétriques et des perturbations extérieures sans singularité et sans surparamétrisation.

## 4.5 Combinaison du backstepping avec les modes glissants d'ordre deux

Le fait de considérer la version adaptative rend l'expression du contrôleur encore plus complexe. Notre défi consiste à optimiser l'algorithme afin de réduire son temps de calcul et ainsi obtenir des performances plus efficaces lors de l'implantation pratique. Pour cela l'algorithme de backstepping peut être modifié pour produire un algorithme robuste sans passer par l'adaptation des paramètres. Cette modification est effectuée à l'étape finale de l'algorithme en intégrant un terme de commande inspiré de l'algorithme de super twisting, tout en assurant la stabilité globale du système.

Pour étudier la robustesse de l'algorithme proposé il est nécessaire de transformer le système en une forme qui facilite la conception de la commande.

Soit :

$$L_1 = h_3, L_2 = h_1 - h_3 > 0, u = q_1 \text{ et } L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

La sortie du système couplé est considérée comme le niveau de la colonne  $h_3$ . Par conséquent, le modèle dynamique dans (1.100) peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= C_1\sqrt{L_2} - B_3\sqrt{L_1} \\ \dot{L}_2 &= B_3\sqrt{L_1} - 2C_1\sqrt{L_2} + \frac{u}{A} \\ y &= L_1\end{aligned}\quad (4.71)$$

Le modèle dynamique du système couplé de réservoirs est fortement non linéaires. Par conséquent, nous allons définir une transformation afin que le modèle dynamique donnée dans (4.71) peut être transformée en une forme qui facilite la conception de la commande.

Soit  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , et définissant la transformation  $x = T(L)$  telle que :

$$\begin{aligned}x_1 &= L_1 \\ x_2 &= C_1\sqrt{L_2} - B_3\sqrt{L_1}\end{aligned}\quad (4.72)$$

La dérivée de (4.72) est maintenant exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= C_1\sqrt{L_2} - B_3\sqrt{L_1} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{C_1\dot{L}_2}{2\sqrt{L_2}} - \frac{B_3\dot{L}_1}{2\sqrt{L_1}}\end{aligned}\quad (4.73)$$

Nous pouvons écrire le modèle dynamique dans (4.73) par la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -C_1^2 + \frac{B_3^2}{2} + \frac{B_3C_1(L_1 - L_2)}{2\sqrt{L_1 - L_2}} + \frac{C_1}{2A}\frac{1}{\sqrt{L_2}}u\end{aligned}\quad (4.74)$$

L'objectif de la commande est de réguler la sortie  $y(t) = x_1(t) = h_3(t)$  à une valeur désirée  $h_{3d}$ . Soit  $x_{1d}$  le niveau de liquide souhaité pour la variable d'état  $h_3(t)$ .

**Step 1 :** La première étape pour construire la loi commande BSOSMC est de considérer l'écart entre la sortie et la valeur désirée :

$$z_1 = x_1 - x_{1d}\quad (4.75)$$

En rappelant la dynamique du niveau de liquide  $\dot{x}_1$  (4.75), la dérivée de  $z_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 - \dot{x}_{1d}\end{aligned}\quad (4.76)$$

En additionnant et en retranchant  $\xi$  à la deuxième équation de (4.76), il vient :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \xi - \dot{x}_{1d} \quad (4.77)$$

avec  $z_2 = x_2 - \xi$ .

Basée sur la dynamique d'erreur de suivi (4.77), la fonction stabilisante correspondante  $\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$  est conçue ainsi :

$$\xi = -k_1 z_1 + \dot{x}_{1d} \quad (4.78)$$

où  $k_1$  est une constante positive.

**Step 2** : La dérivée de  $z_2$  est maintenant exprimée par :

$$\dot{z}_2 = \hat{F} + \tilde{F} + \frac{\hat{C}_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{L_2}} \quad (4.79)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{F} = & -\hat{C}_1^2 + \frac{\hat{B}_3^2}{2} + \frac{\hat{C}_1 \hat{B}_3 (L_1 - L_2)}{2 \sqrt{L_1 - L_2}} \\ & + k_1 \left( \hat{C}_1 \sqrt{L_2} - \hat{B}_3 \sqrt{L_1} - \dot{x}_{1d} \right) - \ddot{x}_{1d} \end{aligned}$$

$\hat{F}$  est une fonction connue. L'expression de la fonction inconnue  $\tilde{F}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & -\tilde{C}_1^2 - 2\tilde{C}_1 \hat{C}_1 + \frac{\tilde{B}_3^2}{2} + \tilde{B}_3 \hat{B}_3 + \lambda \tilde{C}_1 \sqrt{L_2} \\ & + \frac{\tilde{B}_3 \hat{C}_1 + \tilde{C}_1 \tilde{B}_3 + \hat{B}_3 \tilde{C}_1 (L_1 - L_2)}{2 \sqrt{L_1 - L_2}} - \lambda \tilde{B}_3 \sqrt{L_1} \\ & + \frac{\tilde{C}_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{L_2}} + d \end{aligned}$$

où  $d$  est une perturbation extérieure. Pour concevoir la commande CBMGOD, l'incertitude localisée est supposé être borné, c.-à-d  $|\tilde{F}| < \bar{F}$ , et définissant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} s^2 \quad (4.80)$$

avec la surface de glissement donnée par :

$$s = c_1 z_1 + z_2 \quad (4.81)$$

Utilisant (4.77) et (4.79), la dérivé de  $V_2$  peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & z_1 \dot{z}_1 + s \dot{s} \\ = & z_1 \dot{z}_1 + s \left[ c_1 (z_2 - k_1 z_1) + \hat{F} + \tilde{F} + \frac{\hat{C}_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{L_2}} \right] \\ = & -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + s \left[ c_1 (z_2 - k_1 z_1) + \hat{F} + \tilde{F} + \frac{\hat{C}_1}{2A} \frac{u}{\sqrt{L_2}} \right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

Le BSOSMC se produit si  $s = \dot{s} = 0$ , et la condition suffisante est la suivante :

$$\dot{s} = -hs - K|s|^p \text{sgn}(s) \quad (4.83)$$

où  $h, K > 0$  et  $0 < p \leq 0.5$  est satisfaisant [Lev05]. La loi de commande suivant satisfait la condition (4.83) :

$$u = -\frac{2A}{\hat{C}_1} \sqrt{L_2} \left\{ z_1 + \hat{F} + hs + K|s|^p \text{sgn}(s) \right\} \quad (4.84)$$

Pour notre cas, nous choisissons  $p = 0.5$ .

Dans le paragraphe suivant, l'analyse de la stabilité de la dynamique en boucle fermée (4.77), (4.79) est envisagée. Pour prouver la convergence d'un tel algorithme, nous allons considéré la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} s^2 \quad (4.85)$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + s \tilde{F} - |s| \tilde{F} - Ks \sqrt{|s|} \text{sign}(s) - hs^2 \\ &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - hs^2 - K|s| \sqrt{|s|} + |s|(\tilde{F} - \bar{F}) \\ &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - hs^2 - K|s| \sqrt{|s|} \end{aligned} \quad (4.86)$$

On peut réécrire la formule (4.86) comme :

$$\dot{V}_2 = -z^T Q z - K|s| \sqrt{|s|} \leq 0 \quad (4.87)$$

Suivant la même analyse que celle faite dans la section 4.4.2, on peut conclure que le système est stable, ce qui entraîne la convergence exponentielle de  $z_1$  et  $z_2$  vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ .

Selon (4.86), une autre loi de commande par Backstepping second ordre est conçue comme suit :

$$u = -\frac{2A}{\hat{C}_1} \sqrt{L_2} \left\{ z_1 + \hat{F} + \alpha \int \text{sign}(s) dt + K|s|^p \text{sgn}(s) \right\} \quad (4.88)$$

où  $h, K > 0$  et  $0 < p \leq 0.5$ , est satisfaisant [Lev05], et la condition suffisante pour cette loi de commande est la suivante :

$$\dot{s} = -\alpha \int \text{sign}(s) dt - K|s|^p \text{sgn}(s) \quad (4.89)$$

L'objectif de l'algorithme proposé consiste à minimiser l'erreur de suivi de niveau de liquide en présence d'incertitudes de modèle et des perturbations dans le réservoir 2. Deux types de commande sont appliquées au système hydraulique à 2 colonnes, le mode de glissement classique, avec la fonction de saturation et le backstepping combiné avec le mode de glissement d'ordre deux. Une comparaison est effectuée entre eux (CMG et CBMGOD) afin de montrer les avantages et les inconvénients de chacun. Dans tous les cas, les mêmes configurations de processus sont choisies avec les mêmes conditions de fonctionnement à savoir les niveaux d'eau initiaux et les paramètres de réglage de la commande. Les paramètres utilisés pendant cette expérience sont :  $k_1 = 0.001$ ,  $k_2 = 0.007$ ,  $\alpha_1 = 10$ ,  $\beta = 0.005$  et  $\gamma = 35.10^{-5}$ .

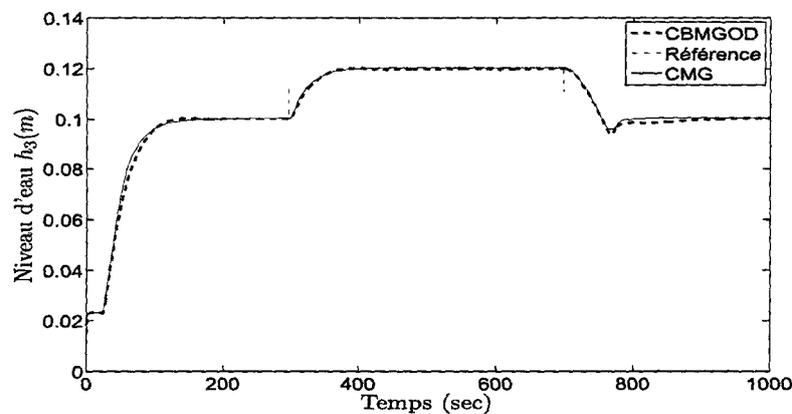


Figure 4.8 : Stabilisation du niveau d'eau dans le reservoir 2 en utilisant la CMG et la CBMGOD.

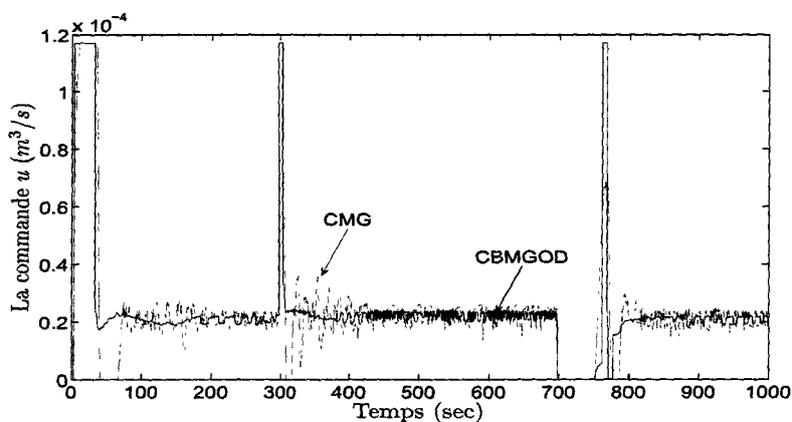


Figure 4.9 : La commande de la pompe 1 en utilisant la CMG et la CBMGOD.

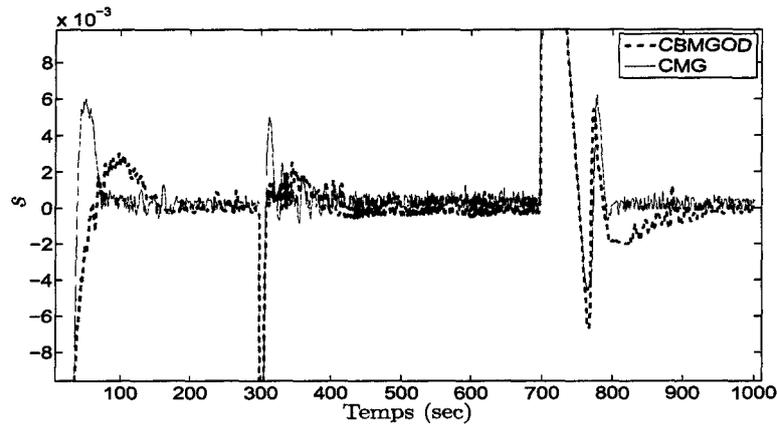


Figure 4.10 : La surface de glissement  $s$

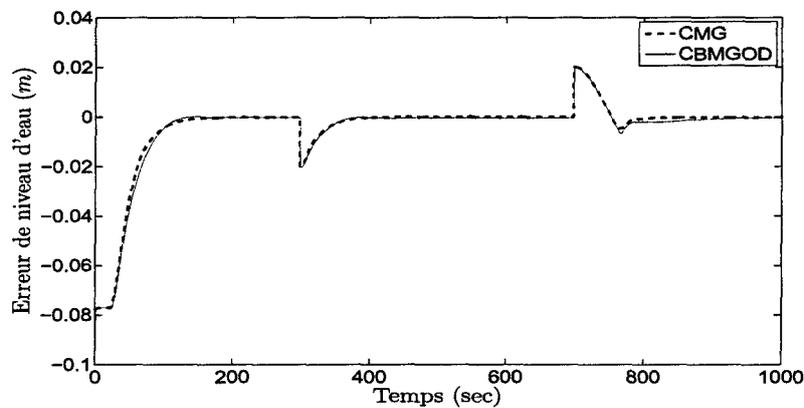


Figure 4.11 : Les erreurs de niveau d'eau en utilisant les deux méthodes de commande

Les figures 4.8, 4.9 et 4.11 présentent les résultats expérimentaux des deux commandes CMG et CBMGOD, sans perturbations extérieures. On peut constater que nous avons une bonne réponse avec une bonne précision dans les deux cas. Le niveau de liquide de référence est fixé à  $100\text{mm}$ , puis à  $120\text{mm}$ . Les résultats obtenus par la stratégie de commande CBMGOD sont montrés dans la figure 4.8 (ligne pointillée). La réponse du système a montré un suivi parfait sans dépassement ni oscillation. Il ressort de ces réponses que la sortie converge vers sa valeur désirée. La figure 4.11 représente la surface et l'erreur de suivi lorsque la CBMGOD est appliquée. On peut remarquer qu'à partir de ces réponses la surface converge vers 0.

Pour montrer l'apport de la méthode CBMGOD par rapport à la CMG, le système est en présence de perturbation extérieures. Pour introduire une perturbation, la valve  $V_{a_{23}}$  du réservoir 2 est ouverte à  $t = 0$ . Dans ce cas, la commande CBMGOD proposée est

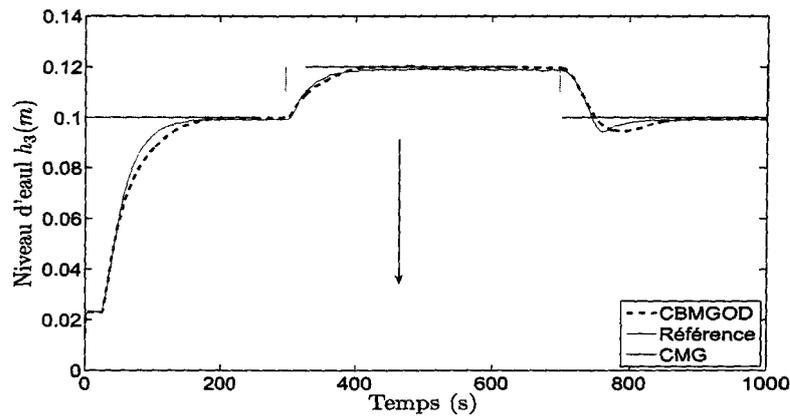


Figure 4.12 : Stabilisation du niveau d'eau  $h_3$  en présence de fuite dans la colonne 2.

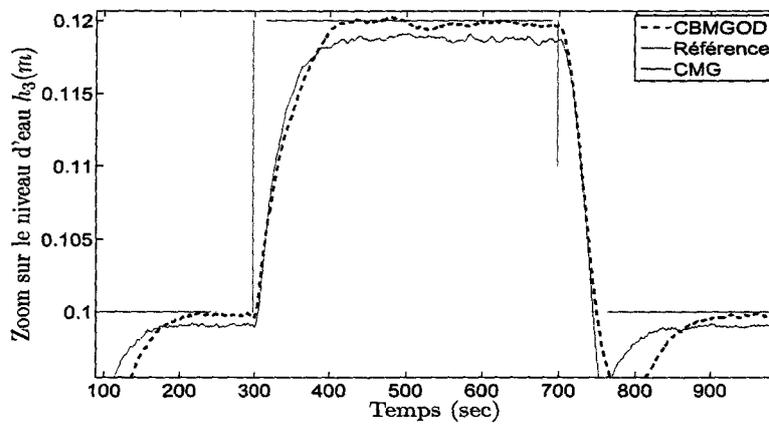


Figure 4.13 : Zoom sur le niveau d'eau  $h_3$ .

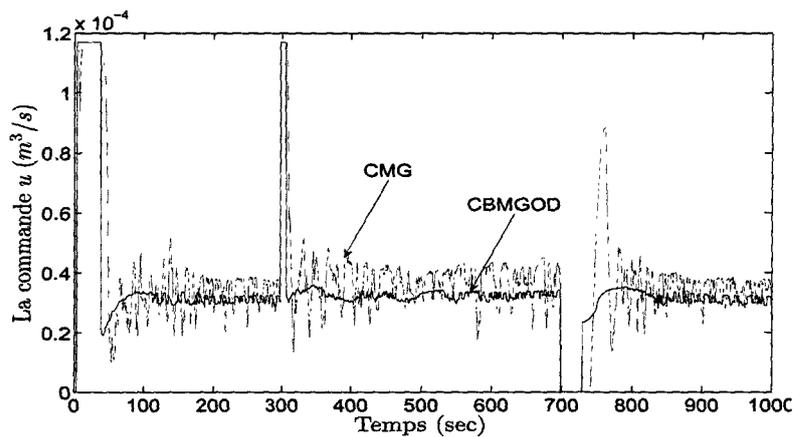


Figure 4.14 : Entrée du système en présence de perturbations

robuste et présente une bonne précision. Nous remarquons qu'il n'y a pas de baisse significative du niveau d'eau malgré la présence de fuites dans la colonne 2, introduite à  $t = 0$

(figure 4.13)(ligne discontinue). La figure 4.14 montre les deux commandes obtenues par la CMG et CBMGOD, nous pouvons constater que cette dernière n'est pas affectée par le phénomène de broutement.

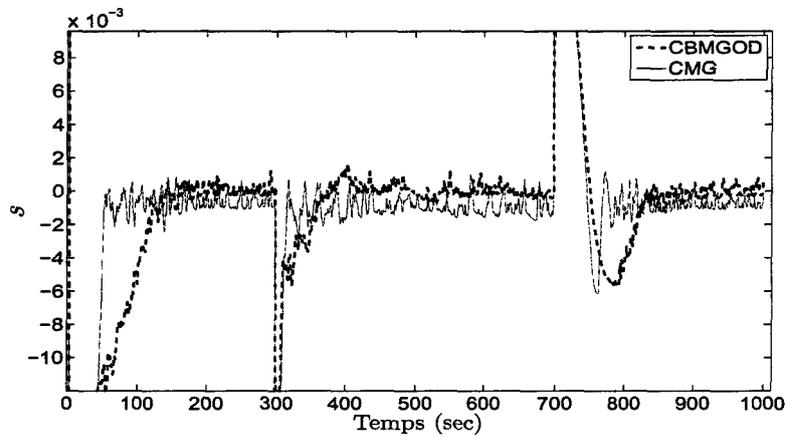


Figure 4.15 : Surfaces de glissement

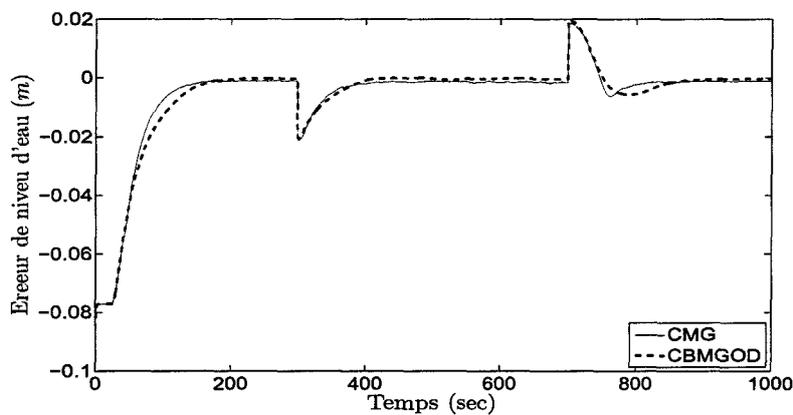


Figure 4.16 : Erreurs de suivi

Il est évident que la commande proposée a amélioré les performances en régime dynamique et en régime permanent de manière significative. Les résultats présentés sont obtenus sans modifier les paramètres de contrôleur.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode combinant l'approche backstepping adaptatif et les techniques de commande par modes glissants. Le choix de ces deux stratégies a été motivé par les objectifs de stabilité et de robustesse qu'elles offrent. L'algorithme associé a été appliqué aux systèmes non linéaires qui peuvent être transformés sous la forme de rétroaction stricte avec incertitude paramétrique ; le système pouvant avoir des perturbations extérieures non modélisées.

La combinaison du backstepping avec le mode glissant donne la possibilité de synthétiser la surface de glissement ; la commande alors obtenue peut contenir un paramètre supplémentaire qui facilite le choix de la vitesse de convergence de la trajectoire d'état vers la surface de glissement. La méthode ne nécessite pas l'existence d'une condition suffisante pour garantir que les trajectoires d'état convergent vers une surface de glissement donnée.

Des résultats expérimentaux ont été obtenus pour la régulation de niveau d'eau du système hydraulique. Les bonnes performances observées montrent la supériorité de cette nouvelle approche par rapport à la version proposée au premier chapitre. Un deuxième algorithme associant la commande par modes glissants d'ordre deux et la technique de stabilisation par backstepping a été proposé. Cet algorithme a permis de garantir l'établissement d'un régime glissant d'ordre deux avec un réglage simple des paramètres de la loi de commande. Les résultats expérimentaux sur un système hydraulique à 3 cuves, système fortement non linéaire, ont montré l'efficacité et la robustesse de cette stratégie de commande.



# Conclusion générale

Nous avons au cours de ce travail de thèse élaboré différents algorithmes de commande robuste et/ou adaptative des systèmes fortement non linéaires. La mise en œuvre des algorithmes repose sur une démarche naturelle mettant en avant l'applicabilité des solutions théoriques préconisées pour la commande des systèmes complexes non linéaires. Pour l'ensemble des algorithmes, en nous fondant sur les travaux scientifiques antérieurs, nous avons recherché une association de critères de robustesse et de stabilité conduisant à une mise en pratique simple des lois de commande. Les techniques de commande par mode de glissement et de backstepping ont été largement explorées et combinées afin d'obtenir une régulation simple et efficace d'un système hydraulique à trois cuves.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous exposons les bases de la CMG, ainsi que ses avantages (simplicité d'implantation, robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures). Nous rappelons également le principal inconvénient de ce type de commande à savoir, l'existence d'un phénomène important de chattering. Nous proposons alors dans la deuxième partie du chapitre, une solution qui permet de réduire efficacement ce phénomène. L'algorithme implanté consiste dans un premier temps à remplacer la couche limite constante par une autre variable dans le temps et par la suite à ajouter un terme intégral à la commande d'entrée (compensation de l'erreur). Ceci permet de rendre la commande plus robuste vis-à-vis des perturbations. La validation sur un système hydraulique à 3 cuves montre les performances de la contribution préconisée. Le deuxième chapitre a été consacré à la mise en œuvre de deux lois de commande CMG d'ordre supérieur dédiées au contrôle de systèmes non linéaires incertains, en particulier les systèmes hydrauliques.

Le premier est fondé sur l'algorithme de twisting utilisant un différentiateur robuste. Le second exploite l'algorithme de super-twisting. La validation expérimentale de ces lois pour la commande du système à trois colonnes a permis de montrer l'applicabilité effec-

tive de ces stratégies. Pour des niveaux de perturbations importantes, on constate une nette atténuation du phénomène de broutement. Nous avons montré que la commande par super twisting est plus simple à implanter, en effet, elle ne nécessite pas la connaissance de la dérivée de la surface de glissement. On note cependant que le réglage du gain de glissement nécessite de trouver un compromis entre le temps de convergence et l'amplitude du broutement. Des solutions pour palier à ce problème sont présentées dans la suite du mémoire, ces solutions s'articulent autour d'une combinaison de la technique backstepping et de l'algorithme de super twisting.

Dans la première partie du chapitre 3, nous avons présenté le concept "backstepping", et étudié l'extension de cette technique à la commande des systèmes dont le comportement n'est pas de type strict feedback. Cette étude a permis l'élaboration d'un nouvel algorithme par backstepping adaptatif que nous avons appliqué à la régulation d'un système hydraulique comportant des paramètres non linéaires incertains. Nous avons montré que ce type d'approche pourrait être avantageusement utilisé pour compenser les incertitudes du système non linéaire à partir de paramètres inconnus. Elle permet par ailleurs de s'affranchir d'une "surparamétrisation", ainsi que, d'une étape de transformation du modèle dynamique associé au système hydraulique en un modèle strict feedback. Les résultats expérimentaux montrent un bon suivi des trajectoires du niveau du liquide, et ceci même en présence des paramètres non linéaires incertains dus aux variations des volumes dans les vannes.

Dans le chapitre 4, nous avons proposé une méthode combinant l'approche backstepping adaptatif et les techniques de commande par modes glissants. Le choix de ces deux stratégies a été motivé par les objectifs de stabilité et de robustesse qu'elles offrent. L'algorithme associé a été appliqué aux systèmes non linéaires pouvant présenter des perturbations extérieures non modélisées. La combinaison du backstepping avec le mode glissant donne la possibilité de synthétiser facilement la surface de glissement ; la commande alors obtenue peut contenir un paramètre supplémentaire qui facilitera le choix de la vitesse de convergence de la trajectoire d'état vers la surface de glissement. La méthode ne nécessite pas l'existence d'une condition suffisante pour garantir que les trajectoires d'état convergent vers une surface de glissement donnée. Des résultats expérimentaux ont été obtenus pour la régulation de niveau d'eau du système hydraulique. Les bonnes performances

---

observées montrent la supériorité de cette nouvelle approche par rapport à la version proposée au premier chapitre. Un deuxième algorithme associant la commande par modes glissants d'ordre deux et la technique de stabilisation par backstepping a été proposé. Cet algorithme a permis de garantir l'établissement d'un régime glissant d'ordre deux avec un réglage simple des paramètres de la loi de commande. Les résultats expérimentaux sur un système hydraulique à 3 cuves, système fortement non linéaire, ont montré l'efficacité et la robustesse de cette stratégie de commande.



# Perspectives

Le travail effectué nous a permis non seulement de proposer des réponses aux questions posées au début de cette étude, mais également d'ouvrir des perspectives concernant la synthèse de commande robuste par les techniques des modes glissants et du backstepping. Pour faire évoluer les algorithmes préconisés, il nous semble intéressant d'approfondir les points suivants :

- Le réglage du paramètre de gain de glissement : Nous avons montré que la commande par super twisting est simple à implanter, mais que le réglage du paramètre gain de glissement n'est pas aisé. En effet, les expériences menées ont montré que les gains des commandes doivent être adaptés aux contraintes du processus. Ceci implique de trouver un compromis entre le temps de convergence et l'amplitude du broutement. Une solution pourrait être d'introduire les techniques de commande par logique floue, ou de rendre le gain de glissement adaptatif face aux incertitudes et aux perturbations extérieures.
- Technique de calcul de la dérivée de la surface de glissement. Nous avons utilisé un différentiateur robuste basé sur les modes glissants d'ordre supérieur. L'utilisation d'un observateur d'état pourrait être une alternative, suivie d'une étude comparative des deux méthodes.
- Loi de commande robuste par mode de glissement d'ordre  $n$  : Actuellement plusieurs travaux concernent les modes glissants d'ordre 2 ou 3, des inconvénients persistent sur le rejet de bruit de mesures dues aux dérivées successives des surfaces de glissement. Dans le cas des systèmes non linéaires, il serait intéressant d'envisager une loi de commande robuste par mode de glissement d'ordre  $n$ . Ceci permettrait d'obtenir des convergences sur les surfaces de glissement plus précises.
- Elaborer des régulateurs numériques à mode glissant ou adaptatifs non linéaires

Les principaux résultats disponibles sur la commande non linéaire concernent les systèmes continus où on a essentiellement suivi la voie qui consiste à discrétiser le régulateur continu et à construire, à partir de la version discrète ainsi obtenue, un régulateur numérique moyennant un blocage d'ordre zéro.

- Proposer l'extension de l'approche par backstepping aux systèmes non linéaire non triangulaire.

Outre les améliorations indiquées, il nous apparaît également intéressant de tester les lois de commandes d'ordre supérieur sur des systèmes liés à la robotique, tels que les robots mobiles. D'un point de vue théorique, généraliser nos différents algorithmes aux systèmes multivariables est une piste intéressante.

# Annexes



# Annexe A

## Preuve de la convergence de l'algorithme de twisting

D'après 2.20, nous avons :

$$\ddot{s} = C + Kv \tag{A.1}$$

avec  $C \in [-C_0, C_0]$  et  $K \in [-K_m, K_M]$

La loi de commande de l'algorithme de Twisting est caractérisée par un mouvement en spirale autour de l'origine. Les trajectoires exécutent des tours et convergent vers l'origine.

Posons d'abord :

$$\begin{aligned} L_1 &= C_0 - \lambda_M K_m \\ L_2 &= C_0 - \lambda_m K_m \\ L_3 &= C_0 + \lambda_m K_M \\ L_4 &= C_0 + \lambda_M K_M \end{aligned} \tag{A.2}$$

Nous avons, par hypothèse,  $L_3 > 0$ ,  $L_4 > 0$ ,  $L_1 < 0$  et  $L_2 < 0$ .

**1<sup>er</sup> quadrant**

Prenons une condition initiale  $(s_0, \dot{s}_0)$  dans le 1<sup>er</sup> quadrant, tant que la trajectoire reste dans ce quadrant nous avons :

$$\ddot{s}(t) = \alpha(t) - \beta(t)\lambda_M \tag{A.3}$$

donc :

$$-L_4 \leq \ddot{s}(t) \leq L_1 \tag{A.4}$$

d'où :

$$-L_4 t + \dot{s}_0 \leq \dot{s}(t) \leq L_1 t + \dot{s}_0 \quad (\text{A.5})$$

et

$$-L_4 \frac{t^2}{2} + \dot{s}_0 t + s_0 \leq s(t) \leq L_1 \frac{t^2}{2} + \dot{s}_0 t + s_0 \quad (\text{A.6})$$

La trajectoire peut elle rester indéfiniment dans le 1<sup>er</sup> quadrant ! Si la solution est définie pour  $t \geq 0$ , puisque  $L_1 < 0$ ,  $\dot{s}(t)$  devient négatif pour tout  $t$  assez grand, ce qui est une contradiction. Si la solution est définie sur un intervalle  $[0 T_{max}[$  (avec  $T_{max} < +\infty$ ), la trajectoire doit tendre vers l'infini, ce qui n'est pas possible puisque  $s(t)$  et  $\dot{s}(t)$  sont majorées par un polynôme en  $t$  qui est borné sur l'intervalle  $[0 T_{max}[$ . La trajectoire doit donc quitter le 1<sup>er</sup> quadrant, et elle ne peut le faire qu'en coupant l'axe des abscisses puisque  $\dot{s} \geq 0$  dans ce quadrant. Soit alors  $t_1$  le temps pour lequel la trajectoire coupe l'axe des abscisses, pour  $t = -\frac{\dot{s}_0}{L_1}$ , nous avons  $\dot{s} \leq 0$ , donc  $t_1 \leq -\frac{\dot{s}_0}{L_1}$ . On déduit que  $s_1 = s(t_1)$ , l'abscisse du point d'intersection de la trajectoire avec l'axe des abscisses vérifie l'inégalité :

$$s_1 \leq s_0 - \frac{\dot{s}_0^2}{2L_1} \quad (\text{A.7})$$

Remarquons en passant que, si  $s_0$  et  $\dot{s}_0$  sont assez petits,  $s(t)$  reste lui aussi petit, si bien que l'on ne quitte jamais la zone de linéarité.

Nous pouvons montrer de la même manière que toute trajectoire issue d'un point du 3<sup>e</sup> quadrant le quitte en coupant l'axe des abscisses et que toute trajectoire issue d'un point du 2<sup>e</sup> ou 4<sup>e</sup> quadrant le quitte en coupant l'axe des ordonnées.

## 2<sup>e</sup> quadrant

Nous allons voir ce qu'il devient d'une trajectoire issue d'une condition initiale  $(s_1, 0)$  du 2<sup>e</sup> quadrant. Tant que la trajectoire issue de ce point reste dans le 2<sup>e</sup> quadrant, nous avons :

$$-L_3 < \ddot{s}(t) < L_2 \quad (\text{A.8})$$

Considérons alors la parabole d'équation

$$s + \frac{1}{2L_3} \dot{s}^2 - s_1 = 0 \quad (\text{A.9})$$

Cette parabole sépare le plan en deux parties disjointes. Si on note  $P(s, \dot{s})$  le membre de gauche de l'égalité ci-dessus, ces régions sont caractérisées par  $P(s, \dot{s}) < 0$  et  $P(s, \dot{s}) > 0$ .

Nous avons  $P(0,0) = -s_1 < 0$ . Considérons la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi(t) = P(s(t), \dot{s}(t)) \quad (\text{A.10})$$

un calcul facile montre que :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{s}(t) \left( 1 + \frac{\ddot{s}(t)}{L_3} \right) \quad (\text{A.11})$$

qui est une expression de signe négatif pour tout temps  $t \geq 0$  pour lequel la trajectoire issue de  $(s_1, 0)$  reste dans le 2<sup>e</sup> quadrant. Cela prouve que  $\varphi(t)$  est une fonction décroissante donc :

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) = -s_1 \quad (\text{A.12})$$

Par conséquent, la trajectoire solution appartient à la région du plan délimitée par la parabole  $P$  et qui contient l'origine : c'est à dire la région comprise entre les axes de coordonnées de cette parabole. La trajectoire solution issue de  $(s_1, 0)$  coupera donc l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée supérieure à  $-\sqrt{2L_3s_1}$  (cette dernière expression est l'ordonnée du point d'intersection de la parabole avec l'axe  $O\dot{s}$ ).

### 3<sup>e</sup> quadrant

En faisant la même analyse, la trajectoire solution issue de  $(s_1, 0)$  coupera l'axe des abscisses en un point d'abscisse supérieure à  $\frac{L_3}{L_1}s_1$ .

### 4<sup>e</sup> quadrant

Dans le 4<sup>e</sup> quadrant, la trajectoire solution issue de  $(s_1, 0)$  coupera l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée inférieure à  $L_3\sqrt{\frac{-2s_1}{L_1}}$ . Finalement si nous appelons  $\acute{s}_l$  l'abscisse du point d'intersection de la trajectoire avec l'axe des abscisses, nous avons (cf. le paragraphe 1<sup>er</sup> quadrant) :

$$\acute{s}_l = \frac{L_3^2}{L_1^2}s_1 \quad (\text{A.13})$$

La trajectoire effectue donc une spirale autour de l'origine, pour que cette spirale soit contractante, il suffit donc que :

$$(C_0 + \lambda_m K_M) < (\lambda_M K_m - C_0) \quad (\text{A.14})$$



# Annexe B

## Outils mathématiques et concept de stabilité

### B.1 Outils mathématiques

**Définition B.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est **Lipschitzienne** en  $x$ , si pour deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  et pour tout  $t$ , nous avons

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (\text{B.1})$$

Si cette condition est vraie pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  alors la fonction  $f(t)$  est dite globalement Lipschitzienne et elle est localement Lipschitzienne quand la condition est satisfaite pour une région de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition B.2.** Une fonction continue  $\alpha : [0; a) \rightarrow [0; 1)$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ .

**Définition B.3.** Une fonction continue  $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est dite de classe  $\mathcal{L}$  ( $\sigma \in \mathcal{L}$ ) si elle est décroissante et si elle tend vers zéro lorsque son argument tend vers l'infini.

**Définition B.4.** Une fonction continue  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dite fonction de classe  $\mathcal{KL}$  ( $\beta \in \mathcal{KL}$ ) si  $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $\beta(s, \cdot) \in \mathcal{L}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

## B.2 Notion de stabilité au sens de Lyapunov

Le concept de la commande par backstepping est basé sur la théorie de Lyapunov. Le but est de construire de proche en proche une loi de commande ramenant le système vers des états désirés. En d'autres termes, on souhaite faire de l'état désiré un état d'équilibre stable en boucle fermée. Dans cette section nous définissons la notion de stabilité au sens de Lyapunov et nous passons en revue les principaux outils utilisables pour prouver la stabilité d'un système non linéaire. Une étude plus détaillée peut par exemple être trouvée dans [Kha01]. On considère un système dynamique décrit par son modèle d'état :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{B.2})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f$  est une application continue de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On suppose que le système possède un équilibre en  $(x_e, u_e)$ . On s'intéresse au comportement de ce système au voisinage de cet équilibre.

### B.2.1 Définitions

**Définition B.5 (Équilibre stable)** *L'équilibre du système (B.2) est dit **uniformément stable** (au sens de Lyapunov) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.q. } \|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0), u_e) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.3})$$

*La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la trajectoire d'état peut être gardée arbitrairement près de  $x_e$ , si l'on prend une condition initiale  $x(t_0)$  suffisamment proche de l'équilibre (c'est-à-dire  $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ ). Si cette condition n'est pas satisfaite, l'équilibre est instable.*

**Définition B.6 (Équilibre attracteur)** *Un point d'équilibre  $x_e$  du système (B.2) est **uniformément attractif** (au sens de Lyapunov) si*

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.q. } \|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0), u_e) - x_e\| = 0 \quad (\text{B.4})$$

*La condition d'attractivité exprime que si l'état initial  $x(t_0)$  est dans un certain voisinage de l'état d'équilibre  $x_e$ , alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant. Il faut noter que stabilité et attractivité sont deux notions différentes et qu'elles ne s'impliquent pas mutuellement.*

**Définition B.7 (stabilité asymptotique)** *Un point d'équilibre  $x_e$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe*

$$\alpha > 0 \text{ t.q. : } \|x(t_0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e \quad (\text{B.5})$$

*La stabilité asymptotique signifie que le point d'équilibre  $x_e$  est uniformément stable et uniformément attractif.*

**Définition B.8 (stabilité exponentielle)** *Un point d'équilibre  $x_e$  du système (B.2) est **exponentiellement stable** si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.q. : } \|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0), u_e) - x_e\| \leq a \|x(t_0) - x_e\| e^{-bt}, \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.6})$$

*La notion de stabilité exponentielle est introduite pour caractériser la vitesse de convergence, cela signifie que le vecteur d'état  $x(t)$ , pour une condition initiale  $x(t_0)$ , converge vers le point d'équilibre  $x_e$  plus rapidement qu'une fonction exponentielle,  $b$  est appelé le taux de convergence.*

## B.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov est basée sur l'observation fondamentale de la physique. Si l'énergie d'un système dissipatif décroît de manière continue en fonction du temps, alors celui-ci évoluera pour rejoindre finalement un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner une fonction scalaire pour analyser la stabilité du système, en se basant sur l'étude des variations de l'énergie (signe de  $\dot{V}$ ) le long de la trajectoire du système.

**Théorème B.1 (stabilité (asymptotique) locale)** *Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système (B.2) et supposons que  $f(x)$  est Lipschitzienne en  $x$ . Soit :  $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continûment différentiable, appelée fonction candidate de Lyapunov telle que*

- $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_e \in \mathcal{D}$ .
- $V(x) > 0$  ( $\forall x \neq 0$  dans  $\mathcal{D}$ ) et  $V(0) = 0$ .
- $\dot{V}(x) \leq 0$  ( $\forall x \neq 0$  dans  $\mathcal{D}$ ).

La dernière condition nous montre que la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est localement *semi-définie négative* dans un voisinage de l'origine  $\mathcal{D}$ , alors le point d'équilibre

est *stable* (stabilité simple).

Si  $\dot{V}(x)$  est localement définie négative dans  $\mathcal{D}$  (i.e.  $\dot{V}(x) < 0$  et  $V(0) = 0$ ), alors la stabilité est dite localement asymptotique.

Afin de garantir la stabilité asymptotique de l'équilibre  $x_e$ , dont la dérivée temporelle est *semi-définie négative* dans un voisinage de  $x_e$  et de conclure sur la stabilité globale du système, nous proposons le principe d'invariance de LaSalle suivant.

### B.2.3 Théorème de LaSalle et Lemme de Barbalat

Notons que pour avoir une stabilité asymptotique du point d'équilibre  $x_e = 0$ , il est nécessaire de prouver que  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $\mathcal{D} - \{0\}$ . Cela dit, il existe d'autres théorèmes qui permettent de montrer la stabilité asymptotique quand  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Pour les systèmes autonomes, il est possible de prouver la stabilité asymptotique quand  $\dot{V}(x) \leq 0$  en considérant le théorème de LaSalle. Pour les systèmes non-autonomes, le Lemme de Barbalat est employé pour prouver la stabilité asymptotique.

**Théorème B.2 (Théorème de LaSalle)** *le point d'équilibre  $x_e = 0$  de (B.2) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction  $V(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  continûment différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- $V(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

Soit  $S$ , l'ensemble des points où  $\dot{V}(x) = 0$  ;

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$$

Alors toute solution bornée converge vers  $M$  le plus grand ensemble invariant inclus dans  $S$ . Si de plus  $M = \{0\}$ , alors le point d'équilibre  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

**Lemme B.1 (Lemme de Barbalat)** *Soit  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue sur  $[0, \infty)$ . Si la limite :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \chi(\tau) d\tau \quad (\text{B.7})$$

*existe et est finie, alors nous avons :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0 \quad (\text{B.8})$$

En combinant la méthode directe de Lyapunov et le Lemme de Barbalat, nous obtenons le théorème de LaSalle et Yoshizawa. Celui ci permet de vérifier si un système non linéaire autonome est globalement asymptotiquement stable dans le cas où  $\dot{V}$  est semi définie négative.

**Théorème B.3 (Théorème de LaSalle et Yoshizawa)** Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre de (B.2), (i.e.  $f(0) = 0$ ), où  $f(x)$  est supposée Lipschitzienne en  $x$ . L'équilibre  $x_e$  est stable s'il existe une fonction scalaire  $V(x(t)) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continûment différentiable, définie positive telle que

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \\ \dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \leq -W(\|x\|) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont des fonctions strictement croissantes, s'annulant en 0 et telles que :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \gamma_1(\|x\|) = \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \gamma_2(\|x\|) = +\infty \quad (\text{B.9})$$

$W$  est une fonction continue. Alors, toute solution de  $\dot{x} = f(x, t)$  est globalement uniformément bornée et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (\text{B.10})$$

En outre, si  $W(x)$  est définie positive, le point d'équilibre  $x_e = 0$  possède une stabilité asymptotique globale et uniforme. Le théorème suivant énonce le principe de l'inégalité de Young.

**Théorème B.4 (inégalité de Young)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, strictement croissante et surjective, vérifiant  $f(0) = 0$ . On note  $g = f^{-1}$ ,  $F$  et  $G$ , respectivement, les applications qui à  $x$  associent  $\int_0^x f(t)dt$  et  $\int_0^x g(t)dt$ . On a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x) + G(y) \geq x.y \quad (\text{B.11})$$

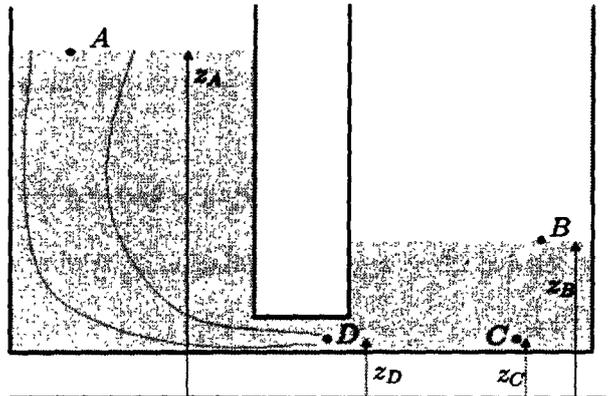
et l'égalité est vérifiée pour  $y = f(x)$ .



# Annexe C

## Rappel sur la relation de Bernouilli

On considère 2 bacs disposés comme sur la figure C.1.



**Figure C.1** : Système hydraulique formé de deux bacs remplis d'eau reliés par un canal

Dans le bac de gauche, l'eau s'écoule de façon fluide, contrairement au bac de droite, où des turbulences existent. Ce sont ces turbulences qui absorbent l'énergie cinétique de l'eau et la transforme en chaleur. Sans ces turbulences, nous aurions un éternel mouvement de va et vient de l'eau entre les deux bacs. Dans le but d'appliquer la relation de Bernouilli dans le bac de gauche, considérons un tube de courant, c'est à dire, un tube virtuel (voir figure C.1) à l'intérieur duquel l'eau possède un mouvement fluide et ne traverse pas les parois. La relation de Bernouilli nous dit que dans ce tube, en tout point :

$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{constante}$$

où  $P$  est la pression au point considéré,  $z$  son altitude,  $v$  la vitesse de l'eau en ce point. Le coefficient  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $g$  est la constante de gravitation. D'après

la relation de Bernouilli, nous avons :

$$P_D + \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g z_D = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A$$

c'est à dire :

$$P_D = P_A + \rho g(z_A - z_D) - \rho \frac{v_D^2}{2} \quad (\text{C.1})$$

De plus, nous pouvons supposer que  $C$  est loin de la zone de turbulence et que l'eau ne bouge pas. Ainsi, nous avons, d'après Bernouilli :

$$P_C + \rho g z_C = P_B + \rho g z_B$$

c'est à dire :

$$P_C = P_B + \rho g(z_B - z_C) \quad (\text{C.2})$$

Or, dans cette zone de turbulence, l'eau se trouve ralentie, mais nous pouvons supposer que la pression ne varie pas, c'est-à-dire,  $P_C = P_D$ . Ainsi, d'après (C.1) et (C.2), nous avons :

$$P_B + \rho g(z_B - z_C) = P_A + \rho g(z_A - z_D) - \rho \frac{v_D^2}{2}$$

Comme  $P_A = P_B = P_{atm}$ , et que  $z_C = z_D$ , cette équation se traduit par :

$$\rho g(z_A - z_B) = \rho \frac{v_D^2}{2}$$

ou encore :

$$v_D = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

Dans le cas où le niveau du bac droit est supérieur à celui du bac gauche, une étude similaire nous donne :

$$v_D = -\sqrt{2g(z_B - z_A)}$$

Le signe moins de l'expression indique que le courant circule maintenant du bac droit vers le bac gauche. Donc, la relation générale pour la vitesse de l'eau dans le canal est :

$$v_D = \text{sign}(z_A - z_B) \sqrt{2g|z_A - z_B|}$$

Si  $S$  est la section du canal, le débit d'eau du bac droit vers le bac gauche est :

$$Q_D = S \cdot \text{sign}(z_A - z_B) \sqrt{2g|z_A - z_B|} \quad (\text{C.3})$$

## Annexe D

# Les principales caractéristiques de la carte Dspace 1102

Les principales caractéristiques de la carte utilisée sont résumées dans le tableau D

Table D.1 : Principales caractéristiques de la carte dspace ds1102

Composants	Caractéristiques
Processeur maître	Texas Instruments TMS320C31 DSP à virgule flottante Fréquence d'horloge 60Mhz.
Processeur esclave	Texas Instruments TMS320P14 DSP Fréquence d'horloge 25Mhz
ADC 16 bits	Intervalle de tension d'entrée $[-10V, +10V]$ Temps de conversion $4\mu s$ Offset : $\pm 5mV$ Marge d'erreur du gain : $\pm 0.5 \%$

DAC	Intervalle de tension d'entrée $[-10V, +10V]$ Temps de conversion $4\mu s$ Offset : $\pm 5mV$ Marge d'erreur du gain : $\pm 0.5\%$ Courant de sortie : $5mA$
Alimentation	$\pm 5V \pm 10\%$ , $2A$ $\pm 12V \pm 10\%$ , $100mA$

# Bibliographie

- [AAKLL09] T. AHMED-ALI, G. KENNE et F. LAMNABHI-LAGARRIGUEC : Identification of nonlinear systems with time-varying parameters using a sliding-neural network observer. *Neurocomputing*, 72(1611-1620), 2009. 22
- [AL00] A. ALLEYNE et R. LIU : Systematic control of a class of nonlinear systems with application to electrohydraulic cylinder pressure control. *IEEE, Transaction on Automatic Control Systems Technologies*, 8(4)(623-634), 2000. 101
- [AS00] A. ALLEYNE et P. SEILER : Adaptive passivity-based nonlinear control for strict feedback form systems. *ASME IMECE, DSC*, 69(495-502), Orlando FL 2000. 121
- [ASBK00] M. ARCAK, M. SERON, J. BRASLAVSKY et P. KOKOTOVIC : Robustification of backstepping against input unmodeled dynamics. *IEEE, transaction on Automatic Control*, 45(7)(1358-1363), 2000. 21, 101
- [AZ06] N. B. ALMUTAIRI et M. ZRIBI : Sliding mode control of coupled tanks. *Mechatronics*, 16(427-441), 2006. 27
- [BBC93] A. BLAUCH, M. BODSON et N. CHIASSON : High-speed parameter estimation of a stepper motor. *IEEE Trans on Contr. Syst. Technol*, 2(270-279), 1993. 21
- [BBKU85] A. G. BONDAREV, S. A. BONDAREV, N. Y. KOSTYLYEVA et V. I. UTKIN : Sliding modes in systems with asymptotic observers. *Automation and Remote Control*, 46(5)(679-684), 1985. 20, 41, 73
- [BCABC08] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Nonlinear sliding-mode control with backstepping approach for a nonlinear three tank system. *MED08, Mediterranean Conference on Control and Automation*, (658-663), 2008. 150
- [BCABC09a] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Application du backstepping adaptatif en utilisant la méthode de réduction de surparamétrage. *JD-JN-MACS, Angers*, 2009. 24
- [BCABC09b] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Controller design using second order sliding mode algorithm with an application to a coupled-tank liquid-level system. *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2009. 24, 91
- [BCABC09c] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Robust second order sliding mode controller for nonlinear hydraulic system. *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2009. 24, 91
- [BCABC10a] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Adaptive backstepping sliding mode control of hydraulic system with nonlinear unknown parameters. *American Control Conference, ACC, soumis*, 2010. 24
- [BCABC10b] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Robust control of nonlinear uncertain systems via sliding mode with backstepping design. *American Control Conference, ACC, soumis*, 2010. 24
- [BCADB09] R. BENAYACHE, L. CHRIFI-ALAOUI, X. DOVIFAAZ et P. BUSSY : Real-time nonlinear adaptive backstepping liquid level control for a state coupled three tank system. *ECC09, European Control Conference*, 2009. 24, 127

- [BCL83] B. R. BARMISH, M. G. CORLESS et G. LEITMANN : A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Control Optim.*, 21(246-255), 1983. 110
- [BCNR93] M. BODSON, N. CHIASSON, R. T. NOVATNAK et R. ROKOWSKI : Feedback control of a permanent magnet stepper motor. *IEEE Trans. on Control systems Technology*, 1-1(5-13), 1993. 21
- [BD95] A. BLOCH et S. DRAKUNOV : Output feedback stabilization using variable structure control. *International Journal of Control*, 62(4)(91-99), 1995. 20
- [BDB96] T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI et J-P BARBOT : Nonlinear sliding observer for systems in output and output derivative injection form. *Proceedings of IFAC World Congress*, (299-305), 1996. 20
- [BE01] A. BENCHAIIB et C. EDWARDS : An input-output linearization based sliding mode scheme for induction motor control using a sliding mode flux observer. *EPE*, 2001. 22
- [Ben00] A. R. BENASKEUR : *Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, 2000. 102
- [BFC04] I. BOIKO, L. FRIDMAN et M.I. CASTELLANOS : Analysis of second order sliding mode algorithms in the frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(6)(946-950), 2004.
- [BFI<sup>+</sup>06] I. BOIKO, L. FRIDMAN, R. IRIARTE, A. PISANO et E. USAI : Parameter tuning of second-order sliding mode controllers for linear plants with dynamic actuators. *Automatica*, 42(833-839), 2006. 88
- [BFLU99] G. BARTOLINI, A. FERRARA, A. LEVANT et E. USAI : On second order sliding mode controllers. *Lecture notes in control and information sciences*, 1999. 75, 79
- [BFPU04] I. BOIKO, L. FRIDMAN, A. PISANO et E. USAI : Oscillations in feedback control systems with fast actuators driven by the second-order slidingmode sub-optimal algorithm. *Proceedings of the 43rd IEEE CDC, Nassau, The Bahamas*, (2585-2590), 2004.
- [BFU97] G. BARTOLINI, A. FERRARA et E. USAI : Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems. *Automatica*, 33(12)(2203-2212), 1997. 21, 88
- [BL82] B.R. BARMISH et G. LEITMANN : On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumption. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 27(153-158), 1982. 137
- [BMMCA<sup>+</sup>09] R. BENAYACHE, S. MAHIEDDINE-MAHMOUD, L. CHRIFI-ALAOUI, P. BUSSY et J. M. CASTELAIN : Design and implementation of sliding-mode controller with varying boundary layer for a coupled tanks system. *MED09, Mediterranean Conference on Control and Automation*, (1215-1220), 2009. 24, 155
- [BMMCAB07] R. BENAYACHE, S. MAHIEDDINE-MAHMOUD, L. CHRIFI-ALAOUI et P. BUSSY : Application of a robust second order sliding mode control to eliminate chattering for a non linear uncertain system. *Analysis and Automatic Control of Systems, STA*, 2007. 62
- [BMMLB09] R. BENAYACHE, S. MAHIEDDINE-MAHMOUD, Chrifi-Alaoui L. et P. BUSSY : Sliding mode control with integral corrector : design and experimental application to an interconnected system. *MED09, Mediterranean Conference on Control and Automation*, (831-836), 2009. 24
- [Boi03] I. BOIKO : Frequency domain analysis of fast and slow motions in sliding modes. *Asian Journal of Control*, 5(4)(445-453), 2003. 73
- [BPPU03] G. BARTOLINI, A. PISANO, E. PUNTA et E. USAI : A survey of applications of second order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 76(9/10)(875-892), 2003. 21, 73, 88, 95
- [BPU01] G. BARTOLINI, A. PISANO et E. USAI : Global stabilization for nonlinear uncertain systems with unmodeled actuator dynamics. *IEEE Pans. Automatic Control*, 46(11)(1826-1832), 2001. 21, 73, 89

- [Bre78] J. W. BREWER : Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 25(772-783), 1978. 35
- [BS90] G. H. BURGIN et S. S. SCHNETZLER : Artificial neural networks in flight control and flight management systems. *IEEE Aerospace and Electronics Conference*, 2(567-573), May 1990. 27
- [BSE96] K. S. BAG, S. K SUPERGEON et C EDWARDS : Dynamic output feedback sliding mode design for linear uncertain systems. *Proceedings of the 35 th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996*. 20
- [Buh86] H. R. BUHLER : *Réglage par mode de glissement*. Presses Polytechniques et Universitaires, Romandes, 1986.
- [BZ86] J. A. BURTON et A. S. I. ZINOBER : approximation of variable structure control. *Int.J. Systems Sci*, 17(875-885), 1986. 73, 144
- [CdWS91] C. Canudas de WIT et J. J. E SLOTINE : Sliding observers in robot manipulators. *Automatica*, 27(5)(859-864), 1991. 20
- [CL81] M. J. CORLESS et G. LEITMANN : Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE trans. Automat. Control*, 26(1139-1144), 1981. 110
- [Cor92] J. M. CORON : Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Mathematics of Cont Sign and Systems*, 5(295-312), 1992. 102
- [CP91] J. M. CORON et L. PARLY : Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems and Control Letters*, 17(89-109), 1991. 102
- [CSR02] H. M. CHEN, J. P. SU et J. C. RENN : novel sliding mode control of an electro-hydraulic position servo system. *IEICE Trans Fundam Electron*, 85(8)(1928-1936), 2002. 48
- [CTDGLR08] B. CASTILLO-TOLEDO, S. DI GENNAROB, A. G. LOUKIANOV et J. RIVERA : Discrete time sliding mode control with application to induction motors. *Automatica*, 44(3036-3045), 2008. 20
- [CW91] T. L. CHERN et Y. C. WANG : Design of integral variable structure controller and application to electro hydraulic velocity servo systems. *IEEE Proc D*, 138(439-444), 1991. 48
- [Dar92] S. DARKUNOV : Sliding mode observer based on equivalent control method. *31 th IEEE Conference on Decision and Control*, (2368-2369), 1992.
- [DCS94] M. DAWSON, J. J. CAROLL et M. SCHNEIDER : Integrator backstepping control of a brushed dc motor turning a robotic load. *IEEE, Transaction on Automatic Control Systems Technologies*, 22(233-244), 1994. 101
- [DD96] M. S. DEQUEIROZ et D. M. DAWSON : Nonlinear control of active magnetic bearings : a backstepping approach. *IEEE Transactions on Control Systems technology*, 4(545-552), 1996. 21, 101
- [DK04] U. DEMIRCI et F. KERESTECIOGLU : A reconfiguring sliding-mode controller with adjustable robustness. *Ocean Engineering*, 31(1669-1682), 2004. 27
- [Dra69] B. DRAZENOVIC : The invariance condition in sliding mode systems. *automatica*, 05(287-295), 1969. 28
- [DSM88] R. A. DECARLO, H. Z. STANISLAW et G. P. MATTHEWS : Variable structure control of nonlinear multivariable systems. *Proceeding of the IEEE*, 76(212-232), 1988. 21, 35
- [EA05] I. EKER et S.A. AKINAL : Sliding mode control with integral action and experimental application to an electromagnetic system. *IEEE-ICSC Congress*, 6(1928-1936), 2005. 50
- [ECRC02] A. ETIEN, S. CAUET, L. RAMBAULT et G. CHAMPONOIS : Control of an induction motor using sliding mode linearization. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, 12(4)(523-531), 2002. 22
- [Efe04] M. O. EFE : Variable structure control of a class of uncertain systems. *automatica*, 40(59-64), 2004. 27

- [EKL86] S. V. EMEL'YANOV, S. V. KOROVIN et L. V. LEVANTOVSKY : Higher order sliding modes in the binary control system. *Soviet Physics*, 31(291-293), 1986. 73, 75
- [EKL90] S. V. EMEL'YANOV, S. V. KOROVIN et L. V. LEVANTOVSKY : A new of second order sliding algorithms. *Mathematical modeling*, 2(3)(89-100), 1990.
- [EK193] S. V. EMEL'YANOV, S. K. KOROVIN et A. LEVANT : Higher-order sliding modes in control systems. *Differential Equation*, 29(11)(1627-1647), 1993. 21, 84
- [Eme67] S. V. EMEL'YANOV : *Variable Structure Control Systems*. Nauka, Moscow, 1967. 27
- [EPK00] K. EZAL, Z. PAN et P. KOKOTOVIC : Loccally optimal and robust backstepping design. *IEEE, Transaction on Automatic Control*, 45(2)(260-271), 2000. 101
- [ES96] C. EDWARDS et S. SPURGEON : Robust output tracking using a sliding mode controller : observer scheme. *International Journal of Control*, 64(5)(967-983), 1996. 20
- [ES00a] C. EDWARDS et S. K. SUPERGEON : On the limitations of some variable structure output feedback controller designs. *automatica*, 36(743-748), 2000. 27
- [ES00b] C. EDWARDS et S. K. SUPERGEON : Sliding mode observers for fault detection and isolation. *automatica*, 36(541-553), 2000. 27, 28
- [Fil60] A. F. FILLIPOV : Differential equations with discontinuous right hand sides. *Mathematicheskii Sbornik*, 51(99-128), 1960. 30
- [Fil83] A. G. FILIPPOV : *Differential equations with discontinuous right hand-sides. Mathematics and its applications*. Kluwer Ac, 1983. 31
- [FK92] R. A. FREEMAN et P. V. KOKOTOVIC : Backstepping design of robust controllers for a class of nonlinear systems. *Proc. IFAC Nonlinear Control Systems Design Sym*, (307-312), 1992. 110
- [FK93] R.A. FREEMAN et P. KOKOTOVIC : Design of softer robust nonlinear control laws. *Automatica*, 29(1425-1437), 1993. 101
- [FK96] R. FREEMAN et P. KOKOTOVIC : *Robust nonlinear control design*. Birkhäuser, 1996. 101, 110
- [FL01] A. FERRARA et Giacomini. L. : On modular backstepping design with second order sliding modes. *Automatica*, 37(129-135), 2001. 22, 146
- [FL02] L. FRIDMAN et A. LEVANT : Higher order sliding mode mode. *Systems and Control Book Series, Taylor and Francis*, (53-101), 2002. 21, 73, 75, 76, 82, 84
- [Flo00] T. FLOQUET : *Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur, Ecole Centrale de Lille*. Thèse de doctorat, 2000. 75, 76, 78, 82
- [Fos77] A. J. FOSSARD : symptotic stability of model reference systems with variable structure control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(279-281), 1977. 20
- [Fos91] A. J. FOSSARD : Commande à structure variable : poursuite approchée du modèle. application à l'hélicoptère. *Rapport Technique DERA*, (167 :91), 1991. 20
- [Fri85] L. FRIDMAN : On robustness of sliding mode systems with discontinuous control function. *Automatika i Telemekhanica (Automation and Remote Control)*, 46(5)(172-175), 1985. 20
- [Fri01] L. FRIDMAN : An averaging approach to chattering. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 46(8)(1260-1264), 2001. 73
- [FWH97] R. F. FUNG, Y. C. WANG et H. H. HUANG : A variable structure control with proportional and integral compensations for electro-hydraulic position servo control system. *Mechatron*, 7(67-81), 1997. 48
- [FX05] T. J. FU et W. F. XIET : A novel sliding-mode control of induction motor using space vector modulation technique. *ISA Transactions*, 44(481-490), 2005. 20
- [FY98] Fung. R. F. et R. T. YANG : Application of vsc in position control of a nonlinear electro hydraulic servo system. *Comput Struct*, 66(4)(365-372), 1998. 48

- [Gao93] W. GAO : Variable structure control of nonlinear systems, a new approach. *IEEE Transaction on Industrial electronics*, 40(45-55), 1993. 27
- [GCZG96] B. GRACAR, P. CAFURA, M. ZNIDARIC et F. GAUSCH : Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Trans. on Control systems technology*, 4(2), 1996. 22
- [GKY05] R. N. GASIMOV, A. KARAMANCIOLU et A. YAZICI : A nonlinear programming approach for the sliding mode control design. *Applied Mathematical Modeling*, 29(1135-1148), 2005. 27
- [Haj96] S. HAJRI : Commande dynamique par mode de glissant application à la robustification des processus complexes. *Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de Lille*, 77(222p), 1996. 22
- [HB96] J. HERNANDEZ et J-P. BARBOT : Sliding observer-based feedback control for flexible joints manipulator. *Automatica*, 32(9)(1243-1254), 1996. 20
- [Hec91] B. HECK : Sliding mode control for singularly perturbed. *Journal of control*, 53(985-1001), 1991. 40
- [HGH93] J. Y. HUNG, W GAO et J. C. HUNG : Variable structure control :. *IEEE Trans Ind Electron*, 40(2-2), 1993.
- [HHP86] F. HARASHIMA, H. HASHIMOTO et K. M. PRACTICAL : robust control of robot arm using variable structure systems. *Proceeding of IEEE, Int. Conf. on robotics and automation San Francisco*, (532-534), 1986. 41
- [HHVM05] P. HAIZHOU, W. HONG, K. VIKRAM et S.Q. MARCIO : Experimental validation of a nonlinear backstepping liquid level controller for a state coupled two tank system. *Control Engineering Practice*, 13(27-40), 2005. 24, 136, 151
- [HT07] H. C. HUANG et C. C. TSAI : Adaptive robust control of an omnidirectional mobile platform for autonomous service robots in polar coordinates. *J Intell Robot Syst*, 2007.
- [Hwa96] C. L. HWANG : Sliding mode control using time-varying switching gain and boundary layer for electrohydraulic position and differential pressure control. *Proc IEE Control Theory Appl*, 143(325-333), 1996. 48
- [HYYH88] H. HASHIMOTO, H. YAMAMOTO, S. YANAGISAWA et F. HARASHIMA : Brushless servo motor control using variable structure approach. *IEEE Transaction on Industry Applications*, 24(160-170), 1988. 42, 50
- [Ina07] N. INANC : A robust sliding mode flux and speed observer for speed sensorless control of an indirect field oriented induction motor drives. *Electric Power Systems Research*, 77(1681-1688), 2007. 20
- [Isi89] A. ISIDORI : *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. 139
- [Isi00] A. ISIDORI : A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear system via output feedback. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45-10(1817-1827), October 2000. 27
- [JJN01] Z. P. JIANG, E. JIANG et H. NIJMEIJER : Saturated stabilisation and track control of a nonholonomic mobile robot. *Systems and Control Letters*, 42(327-332), 2001. 101
- [JN97] Z. P. JIANG et H. NIJMEIJER : Tracking control of mobile robots : A case study in backstepping. *Automatica*, 33(1393-1399), 1997. 21, 101
- [KAALLA08] G. KENNE, T. AHMED-ALI, F. LAMNABHI-LAGARRIGUEC et A. ARZANDE : Non-linear systems time-varying parameter estimation : Application to induction motors. *Electric Power Systems Research*, 78(1881-1888), 2008. 22
- [Kha96] K. KHALIL : *Nonlinear systems (2nd ed.)*. Prentice-Hall, New-York, 1996. 101, 153
- [Kha01] K. KHALIL : *Nonlinear systems (3rd ed.)*. Prentice-Hall, New-Jersey, 2001. 101, 180
- [KKK91] M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULAKIS et P. V. KOKOTOVID : Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Automat. Contr.*, 36(1241-1253), 1991. 137

- [KKK92] M. KRESTIC, I. KANELLAKOPOULOS et P.V. KOKOTOVIC : Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Syst. Contr. Lett.*, 18(177-185), 1992.
- [KKK95] M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULOS et P. KOKOTOVIC : *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley-Interscience, New York, 1995. 101, 102, 105, 110, 114, 119, 125, 145
- [KKM91] I. KANELLAKOPOULAKIS, P. KOKOTOVIC et A. S. MORSE : Systematic design of adaptive controllers for feedback linearisable systems. *IEEE Transactions on automatic Control*, 36(1241-1253), 1991. 101, 137, 146
- [Kol87] A. A. KOLESNIKOV : Analytical construction of nonlinear algebraic regulators with given invariant manifoldst. *Izv. Buisshix Uchevniix Savedenii, Electromexanica*, 3(100-109), 1987. 102
- [KS06] M. K. KHAN et S. K. SPURGEON : Robust mimo water level control in interconnected twin-tanks using second order sliding mode control. *Control Engineering Practice*, 14(375-386), 2006. 21
- [KSL03] M. K. KHAN, S. K. SPURGEON et A. LEVANT : Simple output feedback 2-sliding controller for systems of relative degree two. *European Control Conference*, 2003. 86
- [KZ95] A. J. KOSHKOUEI et A. S. I. ZINOBER : Sliding mode state observers for linear multivariable systems. *34 th Conference on Decision and Control, New-Orleans, LA*, 1995. 20
- [KZ99] A.J. KOSHKOUEI et A.S.I. ZINOBER : adaptive sliding backstepping control of nonlinear semi-strict feedback form systems. *n : Proc. 7th IEEE Mediterranean Control Conf., Haifa, Israel*, 1999. 22, 138
- [Lan88] J. D. LANDAU : *Identification et commande des systèmes*. Hèrmes, Paris, 1988. 77
- [LCH07] F. J. LIN, C. K CHANG et P. K. HUANG : Fpga-based adaptive backstepping sliding-mode control for linear induction motor drive. *IEEE Transactions On Power Electronics*, 22(4)(1222-1231), 2007. 22
- [Lev85] L. V. LEVANTOVSKY : Second order sliding algorithms : their realization. *Dynamic of Heterogeneous Systems, Institute for System Studies, Moscow*, (32-43), 1985.
- [Lev93] A. LEVANT : Siding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6)(1247-1263), 1993. 21, 73, 74, 75, 76, 83, 84, 85, 86, 88
- [Lev98] A. LEVANT : Arbitrary-order sliding modes with finite-time convergence. *Proc. of the 6th IEEE Mediterranean conference on control and systems*, 1998. 87, 89
- [Lev99] A. LEVANT : Controlling output variable via higher order sliding modes. *European Control Conference*, 1999. 86, 87
- [Lev01] A. LEVANT : Universal siso sliding-mode controller with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic control*, 46(9)(1447-1451), 2001. 21, 76, 87, 90
- [Lev03] A. LEVANT : Higher order sliding modes, differentiation and outputfeedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10)(924-941), 2003. 21, 73
- [Lev05] A. LEVANT : Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Mechanics*, 41(5)(823-830), 2005. 21, 160
- [LK05] G. LI et A. KHAJEPOUR : Robust control of a hydraulically driven flexible arm using backstepping technique. *Journal of Sound and Vibration*, (759-775), 2005. 21, 101
- [LL00] F. J. LIN et C. C. LEE : Adaptive backstepping control for linear induction motor drive to track periodic references. *IEE Proceeding-Electric Power Applications*, 147(449-458), 2000. 101
- [LL05] Y. LIU et Y. LI : Sliding mode adaptive neural-network control for nonholonomic mobile modular manipulators. *Journal of Intelligent and Robotique Systems*, 2005. 20, 22

- [LLO03] J. H. LI, T-H S. LI et T-H. OU : Design and implementation of fuzzy sliding-mode controller for a wedge balancing system. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 37(285-306), 2003. 27
- [LSBP04] S. LAGHROUCHE, M. SMAOUI, X. BRUN et F. PLESTAN : Robust second order sliding mode controller for electropneumatic actuator. *Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts*, (5090-5095), 2004. 21, 22, 92
- [LSLT01] T. C. LEE, K. T. SONG, C. H. LEE et C. C. TENG : Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(305-318), 2001. 101
- [Mam75] E. H. MAMDANI : Advances in the linguistic of fuzzy controllers. *Int. Journal of Man-Machines Studies*, 8(669-678), 1975. 27
- [MCAPB06] S. M. MAHIEDDINE, L. CHRIFI-ALAOUI, D. PINCHON et P. BUSSY : Sliding mode control using integral corrector for an induction motor. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2006. 51
- [MCAVAB08] S.M. MAHMOUD, L. CHRIFI-ALAOUI, V. VAN ASSCHE et P. BUSSY : Sliding mode control of nonlinear siso systems with both matched and unmatched disturbances. *International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control , computer engineering, IJ-STA*, 2(1)(350-367), 2008. 20
- [MM07] S. MAHIEDDINE-MAHMOUD : *Contribution à la Commande par Mode de Glissement des Systèmes Mécatroniques*. Thèse de doctorat, 2007. 36, 49
- [MT93] R. MARINO et P. TOMEI : Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 29(181-189), 1993. 110
- [MT95] R. MARINO et P. TOMEI : *Nonlinear control design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995. 110
- [MT99] S. MARINO, R. Peresada et P. TOMEI : Global adaptive output feedback control of induction motors with uncertain rotor resistance. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 44(5)(967-983), 1999. 22
- [MTV05] R. MARINO, P. TOMEI et C.M VERRELLI : A nonlinear tracking control for sensorless induction motors. *Automatica*, 41(1071-1077), 2005. 22
- [MTV08] R. MARINO, P. TOMEI et C.M VERRELLI : An adaptive tracking control from current measurements for induction motors with uncertain load torque and rotor resistance. *Automatica*, 44(2593-2599), 2008. 22
- [NA88] K. NAM et A. ARAPOSTATHIS : A model reference adaptive control scheme for pure-feedback non linear systems. *IEEE Trans.Automat. Contr.*, 33(803-811), 1988. 146
- [NFP08] F. NOLLET, T FLOQUET et W. PERRUQUETTI : Observer-based second order sliding mode control laws for stepper motors. *Control Engineering Practice*, 16(429-443), 2008. 21
- [OAC03] Y. ORLOV, L. AGUILAR et J.C. CADIOU : Switched chattering control vs. backlash friction phenomena in electrical servo-motors. *International Journal of Control*, 76(9-10)(957-967), 2003. 73
- [Oga78] K. OGATA : *System dynamics (1st ed.)*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978. 58
- [Orl05] Y. ORLOV : Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4)(1253-1271), 2005. 21
- [PB02] W. PERRUQUETTI et J. BARBOT : *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker, Inc, 2002. 79
- [PdIPC02] M. Pérez de la PARTE et E. F. CAMACHO : Application of a predictive sliding mode controller to a heat exchanger. *IEEE International Conference on Control Applications*, (1219-1224), 2002. 22
- [PU04] A. PISANO et E. USAI : Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes. *Automatica*, 40(1525-1531), 2004. 21

- [PWKQ05] H. PAN, H. WONG, V. KAPILA et M.S. QUEIROZ : Experimental validation of a nonlinear backstepping liquid level controller for a state coupled tow tank system. *Control Engineering Practice*, 13(27-40), 2005. 101
- [Qu92] Z. QU : Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *Syst. Contr. Lett.*, 18(301-307), 1992. 137
- [Qu93] Z. QU : Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions. *Automatica*, 29(985-998), 1993. 110
- [RBZ97] M. RIOS-BOLYVAR et A.S.I. ZINOBER : Dynamical adaptive backstepping control design via symbolic computation. In : *Proc 3rd European Control Conference ECC Brussels, Belgium*, 1997. 138
- [RBZ98] M. RIOS-BOLYVAR et A.S.I. ZINOBER : Dynamical adaptive backstepping control design via symbolic computation. *Appl. Math. and Comp. Sci*, 8(73-88), 1998. 138
- [SH93] J. J. E. SLOTINE et K. HEDRICK : Robust input output feedback linearization. *Int. J. Control*, 57(1133-1139), 1993. 110
- [SJK97] R. SEPULCHRE, M. JANKOVIC et P. KOKOTOVIC : *Constructive nonlinear control*. Springer-Verlag, 1997. 101
- [SK95] O. SEUNGROHK et H. KHALIL : Output feedback stabilization using variable structure control. *International Journal of Control*, 62(4)(831-848), 1995. 20
- [SK02] S. SESHAGIRIA et H. K. KHALIL : On introduction integral action in sliding mode control. *Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA*, (1473-1479), 2002. 41, 50
- [SK05] S. SESHAGIRIA et H. K. KHALIL : Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators. *Automatica*, 41(43-54), 2005. 41, 50
- [SL91] J. J. E. SLOTINE et W. LI : *Applied nonlinear control*. Printice-Hall International, 1991. 21, 36, 41, 48, 155
- [Slo84] J. J. E. SLOTINE : Sliding controller design for nonlinear systems. *Int. J. Control*, 40-2(421-434), 1984. 21, 41
- [SR88] H. SIRA-RAMIREZ : Sliding regimes in general non-linear systems : a relative degree approach. *Int.J.control*, 5(4)(1359-1390), 1988. 27
- [SR02] H. SIRA-RAMIREZ : Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 10(6)(860-865), 2002. 73
- [SRZA93] H. SIRA-RAMIREZ, M. ZRIBI et S. AHMED : Adaptive dynamical feedback regulation strategies for linearizable uncertain systems. *Int. J. Control*, 57(121-139), 1993. 147
- [Su01] J. P. SU : Variable structure control :. *Robust control of a class of nonlinear cascade systems : a novel sliding mode approach*, 149(2)(131-136), 2001. 48
- [Tee92] A. TEEL : Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 18(165-171), 1992. 102
- [TS85] T. TAKAGI et M. SUGENO : Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics*, 15(116-132), 1985. 27
- [TZY03] X. TAN, J. ZHANG et Y. YANG : synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos, solitons and fractals*, 16(37-45), 2003.
- [UGS99] V. I. UTKIN, J. GULDNER et J. SHI : *Sliding modes control in electromechanical systems*. Taylor-Francis, 1999. 29, 41, 73
- [Utk77] V. I. UTKIN : Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22 (02)(212-222), 1977. 21, 27, 28, 32, 75
- [Utk78] V. I. UTKIN : *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Control*. MIR, Moscow, 1978. 35

- [Utk83] VI. UTKIN : Sliding mode control : present and future. *Automatika i Telemehchanica (Automation and Remote Control)*, 44(3)(1105-1120), 1983. 20
- [Utk92] V. I. UTKIN : *Sliding mode in control and optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. 33, 73
- [Utk97] V. I. UTKIN : Variable structure systems :. *IEEE Trans Automat Contr*, 22(212-222), 1997. 135
- [Utk06] V. I. UTKIN : Chattering problem in sliding modes control systems. *VSS'06*, (346-350), 2006. 21
- [UUP06] I. URSU, F. URSU et F. POPESCU : Backstepping design for controllig electrohydraulic servos. *Journal of the Franklin Institute*, 343(94-110), 2006. 21, 101
- [VPB03] F. VALENCIAGA, P.F. PULESTON et P.E. BATTAIOTTO : Power control of a solar wind generation system without wind measurement : A passivity-sliding mode approach. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 18(501-507), 2003. 22
- [Wai01] R-J. WAI : Total sliding-mode controller for pm synchronous servo motor drive using recurrent fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(5)(926-943), 2001. 22
- [WC03] R-J. WAI et J-M. CHANG : Implementation of robust wavelet-neural-network sliding-mode control for induction servo motor driv. *IEEE Transactions On Power Electronics*, 50(1317-1337), 2003. 22
- [WLT98] L. K. WONG, F. H. F. LEUNG et P. K. S. TAM : A chattering elimination algorithm for sliding mode control of uncertain non linear systems. *Mechatronics*, 8(765-775), 1998. 27
- [WRPS02] D. G. WILSON, R. D. ROBINETT, G. G. PARKER et G.P. STARR : Augmented sliding mode control for flexible link manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 34(415-430), 2002. 20
- [XLJW98] J. X. XU, T. H. LEE, Q. W. JIA et M. WANG : On adaptive robust backstepping control schemes suitable for pm synchronous motors. *International Journal of Control*, 70(893-920), 1998. 101
- [XLP03] J. X. XU, T. H. LEE et Y. J. PAN : On the sliding mode control for dc servo mechanisms in the presence of unmodeled dynamics. *Mechatronics*, 13(755-770), 2003. 20
- [Yao97] B. YAO : Adaptive robust control of siso nonlinear systems in a semi-strict feedback form. *Automatica*, 33(893-900), 1997. 138
- [YM01] Z. J. YANG et M. MINASHIMA : Robust nonlinear control of a feedback linearizable voltage-controlled magnetic levitation system. *Transaction of the Electrical Engineers of Japan*, 121(7)(1203-1211), 2001. 101
- [YZ04] Y. YU et S. ZHANG : Adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic system. *Chaos, solitons and fractals*, 21(643-649), 2004.
- [ZEGB82] A. S. I ZINOBER, O. M. E EL GHEZAWI et S. A BILLINGS : Multivariable structure adaptative model following control systems. *Proceedings of IEE*, 129(6-12), 1982. 20
- [ZL96] A. S. I. ZINOBER et P. LIU : Robust control of nonlinear uncertain systems via sliding mode with backstepping design. *UKACC International Conference on Control*, (281-286), 1996. 144, 145
- [ZLG97] G. ZHU, T. H. LEE et S. S. GE : Tip tracking control of a single-link flexible robot : A backstepping approach. *Dynamics and Control*, 7(341-360), 1997. 101
- [ZO99] M. ZHIHONG et M. ODAY : A robust adaptive terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 24(23-41), 1999. 27
- [ZW95] W. ZHAN et L.Y. WANN : Coordinate transformation in backstepping design for a class of non-linear systems. *Int. J. of Adapt. Contr. and Signal PTOC*, 9(433-442), 1995. 146
- [ZW05] J. ZHOU et Y. WANG : Real-time nonlinear adaptive backstepping speed control for a pm synchronous motor. *Control Engineering Practice*, 13(1259-1269), 2005. 22, 101

## Liste des Publications personnelles

### Congrès Internationaux avec actes et comité de lecture :

- [1] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Controller design using second order sliding mode algorithm with an application to a coupled-tank liquid-level system", *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2009. Accepté.
- [2] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Robust second order sliding mode controller for nonlinear hydraulic system ", *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2009. Accepté.
- [3] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, X. Dovifaaz and P. Bussy "Real-time nonlinear adaptive backstepping liquid level control for a state coupled three tank system", *ECC09, European Control Conference*, August, 2009.
- [4] R. Benayache, S. Mahieddine-Mahmoud, L. Chrifi-Alaoui and t P. Bussy "Design and Implementation of Sliding-Mode Controller with varying boundary layer for a coupled tanks system", *MED09, Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1215-1220, 2009.
- [5] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Sliding mode control with integral corrector : design and experimental application to an interconnected system", *MED09, Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 831-836, 2009.
- [6] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Varying boundary layers sliding mode control for uncertain non linear system with Integral Action", *STA, Analysis and Automatic Control of Systems STA' -ACS-351*, pages 1-15, 2008.
- [7] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Nonlinear Sliding-Mode Control with Backstepping Approach for a nonlinear three tank system", *MED08, Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 658-663, 2008.
- [8] R. Benayache, S. Mahieddine-Mahmoud, L. Chrifi-Alaoui and P. Bussy "Application of a Robust Second Order Sliding Mode Control to Eliminate Chattering for a non linear uncertain system", *STA, Analysis and Automatic Control of Systems*, December 2007.

### Congrès nationaux avec comité de lecture et actes :

- [9] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy et J. M. Castelain "Application du backstepping adaptatif en utilisant la méthode de réduction de sur paramétrage", *JD-JN-MACS 2009*, Angers, France, 17-18 Mars.

### Articles soumis à publication :

#### Congrès Internationaux avec actes et comité de lecture :

- [10] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Adaptive backstepping sliding mode control of hydraulic system with nonlinear unknown parameters ", *IEEE American Control conference, ACC 2010*, soumis.
- [11] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems via Sliding Mode with Backstepping Design", *IEEE American Control conference, ACC 2010*, soumis.
- [12] R. Benayache, W. Bahloul , L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Stabilization of the power angle of synchronous generator via robust second order sliding mode control ", *IEEE American Control conference, ACC 2010*, soumis.

#### Reuves Internationales avec actes et comité de lecture :

- [13] R. Benayache ,W. Bahloul, L. Chrifi-Alaoui, Pascal Bussy and J. M. Castelain "Transient stability of power systems using robust nonlinear second order sliding mode controller ", *Int. J. Power Electronics*, 2009, soumis.
- [14] R. Benayache, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy and J. M. Castelain "Adaptive backstepping sliding mode control for hydraulic system without overparametrization", *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 2009, soumis.

## Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le cadre de la commande robuste et adaptative des systèmes non linéaires et traite une application sur un système interconnecté. La première partie du mémoire présente les principes de fonctionnement du mode de glissement, sa robustesse et son utilisation pour la synthèse de commandes dédiées aux systèmes physiques mal modélisés. Cette partie consiste aussi en l'étude de commandes faisant intervenir les techniques des modes glissants d'ordre supérieur. Différentes lois de commande (commande par mode de glissement avec action intégral, commande par mode de glissement avec couche limite variable, algorithme de twisting et l'algorithme de super twisting) ont été testées en vue d'une compensation robuste des erreurs commises à cause de la méconnaissance des perturbations et de paramètres de système. Pour rendre possible l'implantation pratique de la commande, on s'est fixé comme objectif de réaliser sur un différentiateur robuste par mode de glissement d'ordre supérieur pour estimer ou dériver la sortie bruitée. La deuxième partie concerne la mise au point par expérimentation de la commande par backstepping adaptatif et sa combinaison avec les modes glissants. Deux approches distinctes sont étudiées. La première, est le backstepping classique, qui idéalise le système mais facilite la conception de la commande. La deuxième approche, est la version adaptative, elle prend en compte les perturbations et les paramètres incertains et corrige l'erreur en adaptant ces derniers en temps réel. Alors que la majorité des applications dans la littérature a été réalisée sur des systèmes sous forme triangulaire, nous proposons de le mettre en oeuvre sur le banc d'essais de 3 colonnes sous une forme générale. Nous avons aussi montré qu'avec le contrôleur adaptatif par backstepping conçu, le problème de surparamétrisation n'est pas apparu. Nous avons aussi présenté une méthode de synthèse de lois de commandes par mode de glissement backstepping adaptatif, bien adaptée à ce type de problème. Cette dernière offre un moyen de synthèse des surfaces de glissement. Dans le but d'optimiser l'algorithme et afin de réduire son temps de calcul et ainsi obtenir des performances désirables lors de l'implantation pratique, nous avons proposé une nouvelle combinaison entre le backstepping adaptatif et les modes glissants d'ordre supérieur. Les techniques de commande proposées ont été implantées avec succès sur un système incertain fortement non linéaires.

## Abstract :

The work presented in this thesis is part of the robust and adaptive control of highly nonlinear systems and treats an application on an interconnected hydraulic system. The first part of the report presents the principles of operation of the sliding mode, its robustness and its use for the synthesis of controllers dedicated to the badly modelled physical systems. This part also consists of the study of controllers involving the techniques of higher order sliding modes. Different control laws were tested for robust compensation of errors due to ignorance of the disturbance and system parameters. To make possible the practical implementation of the controller, we settled as objective to realize robust differentiator by higher order sliding modes to estimate or derive the noisy measurement. The second part concerns the development by experiment of the controller based on backstepping adaptive and its combination with sliding modes. Two distinct approaches are studied. The first is the classical backstepping, which idealizes the system but facilitates the design of the controller. The second approach is the adaptive version, it takes into account the disturbances and uncertain parameters and corrects the error by adapting these parameters in real-time. While the majority of applications in the literature was carried out on systems under strict feedback form, we propose to implement it on the three tank system which is in a general form. The advantage of this control algorithm is that it solves the overparametrization problem. We also presented a method of synthesis of control laws for adaptive backstepping sliding mode, adapted well to this type of problem. This last offer a means of synthesis of the sliding surfaces, we also note a better transitory behaviour during sudden disturbance rejection. In order to optimize the algorithm and to reduce its computation time and thus obtain desirable performance in the practical implementation, we proposed a new combination between the adaptive backstepping and second order sliding mode. The proposed control techniques have been successfully established on an uncertain hydraulic system strongly nonlinear.